GEOMATEMATIKA

Geometria lantzea papiroflexiaren bidez

Miren Begoña San Martin Fernandez

Gasteizko Irale-R400

ESKERRAK

Eskerrak eman nahi dizkiet beren lana Interneten eskegitzen duten irakasle eta *origami*-zale guztiei; haiei esker materiala guztion eskura baitago.

Bestalde, aipamen berezia Arantza Goikoetxeaundiari, egin duen zuzenketa-lanagatik, eta Eusko Jaurlaritzako Hezkuntza Sailari sormen-lan hau egiteko aukera emateagatik.

0. MAPA KONTZEPTUALA

GEOMATEMATIKA

FORMULA ALJEBRAIKOEN BIDEZ AZALERAK SORTZEA

EGITASMOA

GIDA DIDAKTIKOA

PAPIROFLEXIA

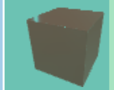
- Sonobe modulua
- modulu triangeluarra
- PHiZZ modulua
- hiru puntako giroskopio modulua
- lau puntako giroskopio modulua

KONTZEPTU GEOMETRIKOAK

- triangelua
- laukia
    - biren erroko proportzioa duen laukizuzena
    - hiruren erroko proportzioa duen laukizuzena
    - urrezko laukizuzena
- pentagonoa
- hexagonoa
- zirkunferentzia

SOLIDO PLATONIKOAK


tetraedroa


kuboa


oktaedroa


dodekaedroa


ikosaedroa

SAKONTZEKO MATERIALA

- arazo-egoerak
- irakurtzeko gaitasuna
- matematika-olinpiada

BALIABIDEAK

IRUDIEN ERREFERENTZIA

ERANSKINA

EGITASMOA

Matematika-tailer honetan, geometria landuko eta irudi eta gorputz geometrikoak manipulatuko ditugu. «Geometriak espazioko orientazioarekin eta adierazpenarekin, kokapenarekin, espazioko objektuen deskribapenarekin eta ezagutzarekin lotutako edukiak biltzen ditu; bai eta forma lauen eta hiru dimentsioko formen azterketa ere» (236/2015 DEKRETUA, abenduaren 22koa). hiru dimentsioko formen azterketa ere» (236/2015 DEKRETUA, abenduaren 22koa). Beraz, irudi lauak zein hiru dimentsioko formak, eta haien propietate garrantzitsuenak landuko ditugu. Geometria ikertuz, aukera izango dugu formak eta gorputzak eraikitzeko, marrazteko, neurtzeko eta sailkatzeko. Eta, horrekin batera, baita geometriak beste jakintza-alor batzuekin duen erlazio hertsia ezagutzeko ere. Besteak beste, zientziarekin, ingeniaritzaren, artearekin eta arkitekturarekin (STEAM: *Science Technology Engineering Arts & Mathematics*). Bestalde, matematikaren adar hau lantzeko, programa informatikoak erabiltzea bereziki interesgarria da, hala nola Geogebra eta Surfer programak.

Gure ingurunea kontzeptu geometrikoz beteta dago, eta horiek egoera fisiko errealak aztertzeko iturri dira. Gainera, geometriak erlazio oso estua du zenbakizko edukiekin eta eduki aljebraikoekin, eta, horri esker, aukera daukagu hainbat formulen bidez zeharkako neurketak egiteko. Neurketa horiek distantzien, gainazalen edo bolumenen kalkuluak eginez gauzatuko dira. Bestalde, jarduera horiek ikasleen eta haien ingurunearen arteko interakzio dinamikoa eska dezakete, neurketak mundu errealaren miaketa aktiboa izan behar baitu.

2. GIDA DIDAKTIKOA

2.1.MATEMATIKARAKO KONPETENTZIA

Matematikarako konpetentziaren osagaiak, Oinarrizko Hezkuntza curriculumean[1] zehaztuak, honako hauek dira:

a) Estrategia egokien bidez identifikatzea eta ebaztea eduki matematikoa duten zenbait egoera problematiko, eta, horrela jokatuta, ingurunea hobeto ulertzeko urratsak egitea.
b) Jakintza matematikoak erabiltzea eguneroko edota zientziaren esparruko egoerei aurre egiteko, egoera horiek «eredu» bihurtuta; hau da, egoerak termino matematikoetan adieraztea, ereduari jarraitzea eta emaitzak testuinguruaren barruan interpretatzea.
c) Bizitzaren hainbat esparrutako informazioak, argudioak eta emaitzak interpretatzea eta adieraztea, hizkuntza matematiko egokia erabilita.
d) Jakintza matematikoak ezagutzea, erlazionatzea, integratzea eta balioestea, egoera bakoitzaren berezko ezaugarriak kontuan hartuta.
e) Arrazoitzeko modu askotarikoak erabiltzea nork bere ondorioak eta horietara iristeko prozesua justifikatzeko, bai eta gainerako pertsonek aurkeztutako emaitzak modu kritikoan aztertzeko ere.
f) Prozedura matematiko egokiak hautatzea eta erabiltzea errealitatea kalkulatzeko, irudikatzeko eta interpretatzeko, eta, horren harian, eraginkortasunaren mesedetan erabiltzea informazioaren eta komunikazioaren teknologiak.

[1] 236/2015 DEKRETUA, abenduaren 22koa, Oinarrizko Hezkuntza curriculuma zehaztu eta Euskal Autonomia Erkidegoan ezartzen duena.

GeoMatematika egitasmoaren erronketako bat da matematikarako konpetentziako helburuak bermatzea; horretarako ezarritako **helburu**, **eduki**, ebaluazio-irizpide eta **lorpen-adierazleak**[22] hauek dira:

2.2. HELBURUAK

1. Banaka edo taldean, eguneroko bizitzatik ateratako problemak, beste zientzia batzuetakoak edo Matematikakoak planteatzea eta ebaztea, eta zenbait estrategia aukeratzea eta erabiltzea, ebazpen-prozesua justifikatzea, emaitzak interpretatzea eta egoera berrietan aplikatzea, gizarte-ingurunean modu eraginkorragoan jardun ahal izateko.

2. Matematikako ezagutza aplikatzea eguneroko bizitzako gertaerei eta egoerei buruzko informazioak eta mezuak ulertzeko, balioesteko eta sortzeko, eta beste ezagutza-arlo batzuetan erabilgarriak direla jakitea.

3. Natura- eta kultura-inguruneko forma geometrikoak identifikatzea, elementuen, erlazioen eta propietateen ezagutza erabiliz, errealitatea deskribatzeko, eta ezagutza geometrikoak aplikatzea inguruan dugun mundu fisikoa ulertzeko eta analizatzeko, eta hari buruzko problemak ebazteko.

4. Kalkuluak eta iritzirako kalkuluak (zenbakizkoak, metrikoak, etab.) segurtasunez eta konfiantzaz egitea, egoera bakoitzean prozedura egokienak (buruzko kalkulua, idatzia, kalkulagailua...) erabiliz, bizitzako egoerak interpretatzeko eta balioesteko, eta emaitzak sistematikoki berrikustea.

5. Beren adinerako egokiak diren eta emaitzak eta ondorioak argi eta garbi eta koherentziaz justifikatzeko eta aurkezteko norberaren pentsamendua adieraztea errazten duten hizkuntza arrunteko eta hizkuntza matematikoko elementuak (zenbakiak, taulak, grafikoak, irudiak) erabiliz, arrazoitzea eta argudiatzea.

6. Informazioaren eta komunikazioaren teknologiak (kalkulagailuak, ordenagailuak, etab.) behar bezala erabiltzea kalkuluak egiteko, denetariko informazioak bilatzeko, tratatzeko eta adierazteko, bai eta Matematika ikasten laguntzeko ere.

7. Matematika kulturaren parte dela balioestea, hura erabiliz gozatzea, Matematikako jardueraren moduen eta jarreren balioa bereiztea, eta eskuratutako Matematikako konpetentziak aplikatzea, zenbait fenomeno sozial analizatzeko eta balioesteko; esate baterako, kultura-aniztasuna, ingurumena errespetatzea, osasuna,

---

[2] OINARRIZKO HEZKUNTZAKO CURRICULUMA (236/2015eko Dekretuaren II. Eranskina osatzen duen curriculum orientatzailea.

kontsumoa, genero-berdintasuna edo bizikidetza baketsua.

2.3. EDUKIAK

- Irudiak planoan: triangeluak, laukiak eta beste poligono batzuk. Elementuak eta ezaugarriak. Propietateak deskribatzea eta haien kalkulu metriko zuzenak eta zeharkakoak.
- Poliedro eta biraketa-gorputz ohikoenak: kuboa, prisma, piramidea, zilindroa, konoa eta esfera. Garapen lauak eta elementu bereizgarriak. Sailkapena.
- Irudien eta gorputzen perimetroak, azalerak eta bolumenak kalkulatzea eta iritzira kalkulatzea, zenbait prozedura erabiliz.
- Zenbait tresna erabiltzeko teknikak, tresna informatikoak barne, irudi lauak eta espazialak marrazteko eta erlazio geometrikoak aztertzeko.

2.4. EBALUAZIO-IRIZPIDEAK ETA LORPEN-ADIERAZLEAK

Hauek izango dira kontuan hartuko diren ebaluazio-irizpideak:

Espazioen eta objektuen luzerak, azalerak eta bolumenak planteatutako egoerarako egokia den zehaztasunez iritzira kalkulatzea eta kalkulatzea. Gainera, iritzirako kalkuluaren edo kalkuluaren emaitza unitaterik egokienean adieraztea. Azkenik, neurketa-prozesuak ulertzea eta inguruko problemen ebazpenetan aplikatzea.

- Egin beharreko neurketen iritzirako kalkulu doituak egiten ditu, hurbileko erreferentziak erabiliz.
- Irudi eta gorputz geometriko garrantzitsuenen (triangelua, laukizuzena, zirkunferentzia, zirkulua, prisma, piramidea, zilindroa, konoa eta esfera) perimetroak, azalerak eta bolumenak kalkulatzeko formula egokiak aplikatzen ditu.
- Irudien eta gorputzen azalerak eta bolumenak kalkulatzen ditu, zenbait metodo erabiliz; bereziki, oinarrizko irudi eta gorputzetan deskonposatuz.
- Gorputz geometrikoen (prisma, piramidea, zilindroa, konoa) garapen lauak bereizten eta egiten ditu.
- Neurketarekin lotutako problemak ebazten ditu, prozedura informalak eta prozedura akademikoak erabiliz.

- Pitagorasen teorema aplikatzen du elementu geometrikoen neurketarekin lotutako problemak ebazteko.

3. PAPIROFLEXIA: TRESNA PAREGABEA GEOMETRIAREN IRAKASKUNTZAN

Papiroflexiak hainbat onura ditu eta lagungarria da hainbat gaitasun garatzeko:

- Papiroflexia tresna pedagogikoa da eduki kontzeptualak eta prozedurazko edukiak jorratzeko; baliagarria da abilezia motorrak garatzeko. Ondorioz, papiroflexiaren bidez psikomotrizitatea, lateralitatea eta espazio-pertzepzioa lantzen dira.
- Esku-trebezia eta neurriak doitzeko gaitasuna garatzen dira.
- Ikasleak Matematika beste alor batzuekin erlazionatzen du, adibidez, artearekin eta zientziarekin.
- Papiroflexiak ikaslearen sormenean eragiten du; ikasleak bere modeloak sortzen ditu, eta, baitezpada, geometria lauaren eta espazialaren arteko lotura ikertzen du.

Papiroflexia jakintza baliotsua da matematika-saioetako hainbat esparrutan:

- **Jarrera egokia sustatzen du:** eskemak arretaz behatu eta interpretatu behar dira.
- **Talde-lana ahalbidetzen du:**
  Askotan, matematikan abstraktuki trebeak ez diren ikasleek gustuko izaten dute gorputz geometrikoak eraikitzea. Beraz, ezagutzari dagokionez, ikasleen arteko

aldeak lausotu egiten direnez, indartu egiten da kooperazioa.

- **Garapen kognitiboa bultzatzen du:**
  Ikasleek paper zatiak tolesteko eskuak erabiltzen dituzte; gainera, sekuentzia kronologikoa jarraituz, emaitza ikusgarria eta gogobetegarria lortzeko aukera dute.

PAPIROFLEXIAREKIN LANDU DAITEZKEEN EDUKI MATEMATIKOAK

Paper zati lau bat hiru dimentsioko irudi bilakatzea ariketa aparta da espazioa ulertzeko. Gainera, simetria ere lantzen da; askotan, tolesturak alde batera eta aurkako aldera ere egin behar baitira. Beraz, hainbat kontzeptu geometriko (diagonala, erpina, erdikaria, erdibitzailea, altuera…) lantzen dira. Baina, horrez gain, irudi lauak zehatz-mehatz bistaratu eta eraiki daitezke.

Hainbat gorputz geometriko eraikitzeko, papiroflexia modularra erabiltzen da, non modulu batzuk mihiztatuz eraikitzen baitira. Sonobe modulua, esate baterako, bereziki ezaguna da. Uste da haren sortzaileak Toshie Takahama eta Mitsunobu Sonobe japoniarrak izan zirela, 1960. urtearen inguruan. Horrez gain, beste modulu batzuk ere erabiltzen dira: modulu triangeluarra, PhiZZ modulua, modulu giroskopikoa…


Esteka honetan, Sonobe moduluaren erabilera artistikoa dugu ikusgai.

PAPIROFLEXIA ETA TEKNOLOGIKOA

Aspalditik ezaguna da papiroflexiaren balio artistikoa; horrez gain, gaur egun papiroflexiak edo *origami*ak baditu beste funtzio batzuk, bai zientzian, baita teknologian ere, hainbat arazori irtenbide berriak emateko. Adibidez, medikuntzan, minbiziaren kontra, DNA nanorobotak garatzen ari dira. Bestalde, aeronautikan, sateliteen panelak *origami* ereduen arabera hedatzen dira. Ingeniaritza elektronikoan, berriz, bateriak papiroflexia-eredu batzuen arabera kokatzen dira; helburua da azalera maximoa lortzea, baina espazio minimoa hartuz. Ikusi adibide batzuk bideo hauetan:

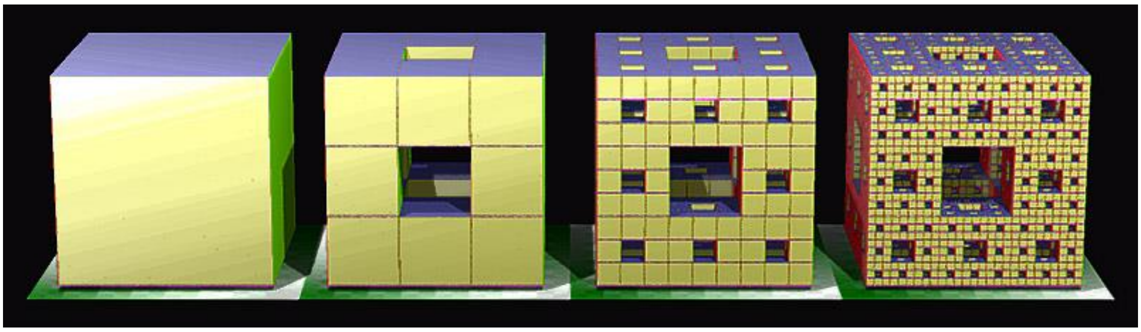
JARDUERA: talde-dinamika

Papiroflexia artistikoa antzinatik erabili izan da. Gaur egun, eta bideoetan ikusi dugun moduan, gero eta gehiago erabiltzen ari da teknologiaren munduan, hala nola medikuntzan, robotikan, altzarien diseinuan, eta abarretan. Guk ere, daukagun sormen-ahalmenaz baliatuz, papiroflexia non aplika daitekeen pentsatuko dugu. Agian, gure proposamenak gauzatu ditzakegu proiektu honen bukaeran, eta gure ikastetxean erakusketa bat antola dezakegu. Ideia guztiak onak dira, eta maketak diseinatzea izango dugu helburu.

3.1. SONOBE MODULUA

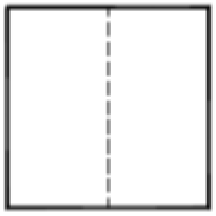
Sonobe modulua oso ospetsua egin zen bere sinpletasunagatik. Horregatik, ez dira gutxi modulu honen inguruan egin diren justifikazio matematikoak. Modulu klasiko bihurtu da *origami* modularra egiteko.

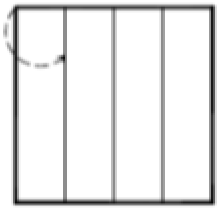
Paralelogramo baten forma du eta haren angeluak 45º eta 135º-koak dira. Bi eremu desberdin ditu, bi azal-hegal eta bi poltsiko. Modu horretan, karratu bat mugatzen da erdian. Sonobe moduluarekin hainbat gorputz geometriko eraiki daitezke, azal-hegalak eta poltsikoak mihiztatuz. Esaterako, kuboa, bipiramide karratua eta aurpegietan triangeluak dituzten poliedro izartuak, hala nola oktaedro izartua (12 modulu), ikosaedro izartua (30 modulu) eta pentakisdodekaedro izartua (60 modulu). Beste adibide artistikoago bat Mengerren belakia da, fraktala ere badena.



Eraiki dezagun Sonobe modulua. Horretarako, tolesturak lortzeko karratu batetik abiatuko gara:

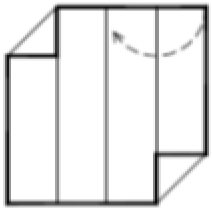
1. Erditik tolestu.

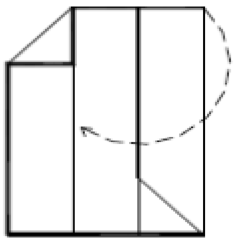




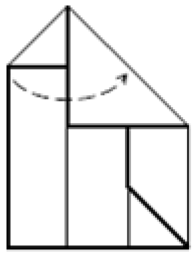
2. Lortutako zati bakoitza berriro erditik tolestu.

3. **Pauso honetan, ADI!** Beti ertz berdinak aukeratu behar dira moduluak eraikitzeko. Bestela, modulu simetrikoa agertuko da eta piezak ezin izango dira uztartu. Beraz, tolestu aukeratutako ertza hurbilen duen tolesturaraino. Ondoren, biratu papera 180º eta errepikatu prozesua aurkako ertzarekin.

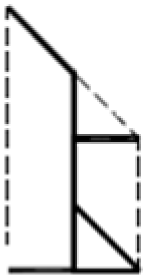




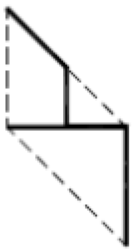
4. Tolestu alde bat erdiraino.



5. Eraman erdiraino tolestu gabeko ertza.

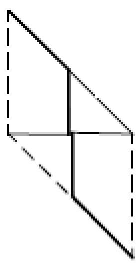


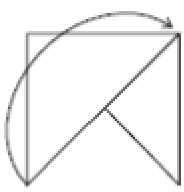
6. Eraman erdiraino aurkako aldea.



7. Tolestu gabeko ertzean, errepikatu 5. eta 6. urratsak.

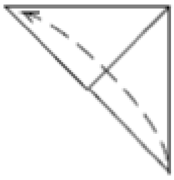
8. Sortutako tolestura sartu 4. urratsean egindako erlaitzaren barrutik. Era horretan, modulua osatuko da, eta tolestea baino ez da faltako moduluak elkarrekin uztartzeko.

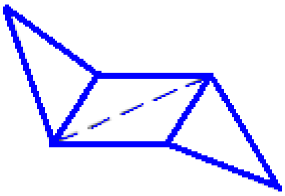




9. Tolestu pieza erditik.

10. Sortu diren bi triangeluak, tolestu erditik eta kanporantz.





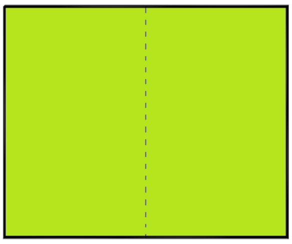
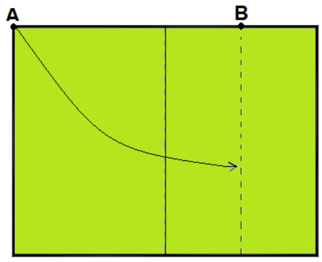
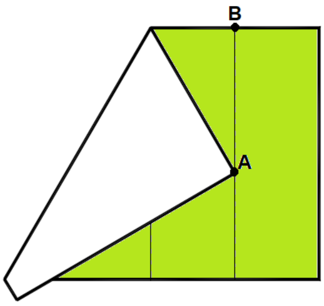
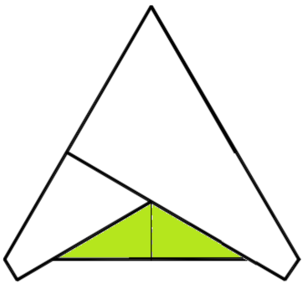
11. Pieza zabaltzean, lau triangelu isoszele angeluzuzen agertuko dira.

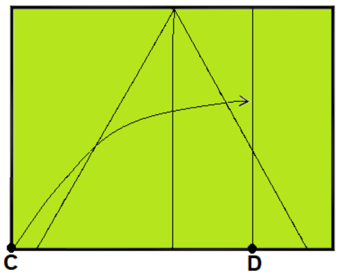
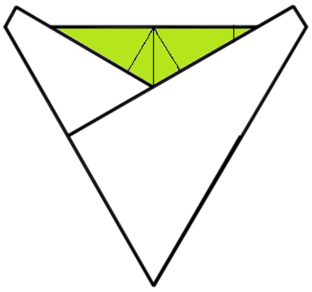
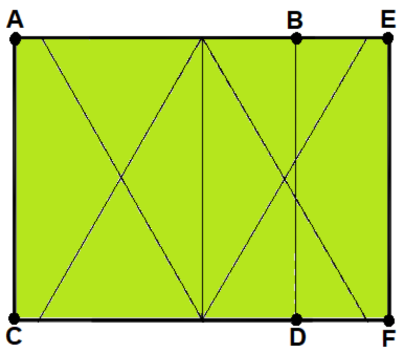
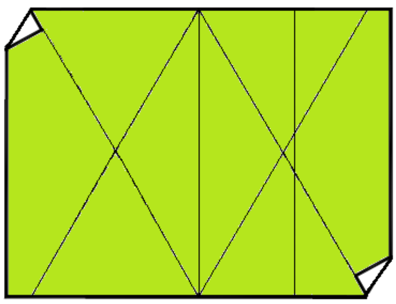
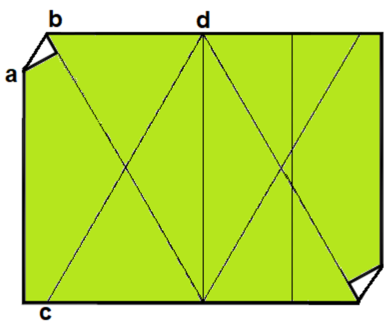
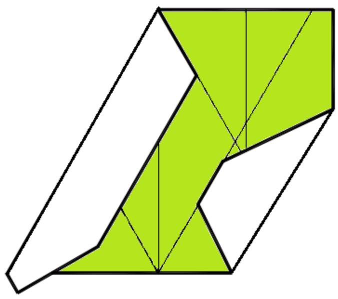
Bideo honetan ikus dezakegu prozesua:

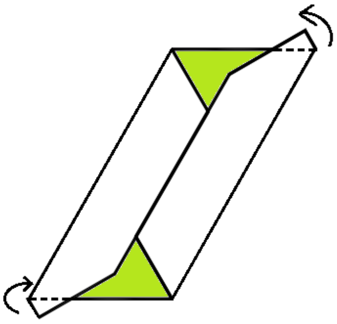
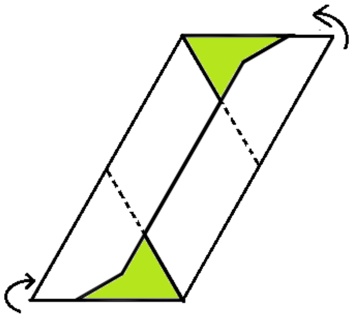
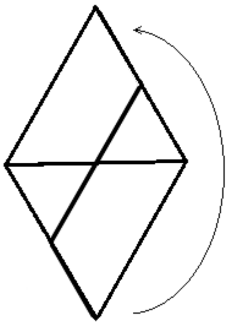
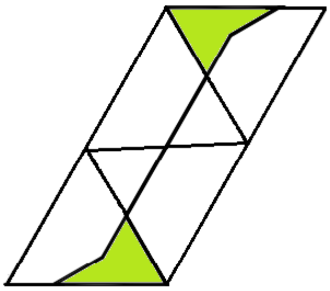
Orain, gorputz geometrikoak eraikiko ditugu hainbat Sonobe modulurekin. Adibidez, 3 modulurekin bipiramide triangeluarra; 6 modulurekin kuboa; 12 modulurekin oktaedro izartua, eta 30 modulurekin ikosaedroa izartua.

3.2. MODULU TRIANGELUARRA

Modulu triangeluarra Helena Verrill matematikari ingelesak diseinatu zuen. Modulu honekin tetraedroa, oktaedroa, ikosaedroa, bipiramide karratua eta bipiramide pentagonala eraiki daitezke. Hona hemen modulu hori eraikitzeko eman beharreko pausoak:

1. Tolesturak lortzeko, edozein neurritako laukizuzen batetik abiatuko gara: 	2. Laukizuzena erditik tolestuko dugu eta, berriro, erdiaren erditik. 
3. *A* erpina *B* erpinetik igarotzen den perpendikularraren gainera eramango dugu. 	4. Prozesua errepikatuko dugu *A*-ren aurkako erpinetik. 60º -ko angelua sortuko da horrela. 

5. Hirugarren pausoa *C* puntuarekin errepikatuko dugu. 	6. Laugarren pausoa, *D* puntuarekin errepikatuko dugu. 
7. Egindako tolestura guztiak desegingo ditugu. 	8. *A* eta *F* erpinak gertuen duten diagonalaren gainera eramango ditugu. Kontuan hartu: pauso hori *C* eta *E* erpinetatik eginez gero, modulu simetrikoa edo ispiluko irudia agertuko litzateke (hainbat gorputz eraikitzeko, bi moduluak beharko dira). 
9. Orain $\overline{ab}$ zuzenkia $\overline{cd}$ zuzenkiaren gainera eramango  dugu.	10. Prozesua aurkako erpinetik errepikatuko dugu. 

<table>
<tr>
<td>11. Goian eta azpian geratzen diren erlaitzak atzerantz tolestuko ditugu.
</td>
<td>12. Orain, lau triangelu aldekide azaleratzeko, markatutako marretatik atzerantz tolestuko ditugu goiko eskuin-erpina eta azpiko ezker-erpina.
</td>
</tr>
<tr>
<td>13. Sortutako erronboidea erditik tolestuko dugu.
</td>
<td>14. Egindako tolesturak hamabigarren pausoraino desegingo ditugu.
</td>
</tr>
</table>

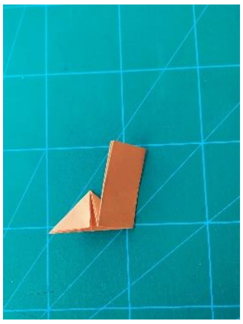
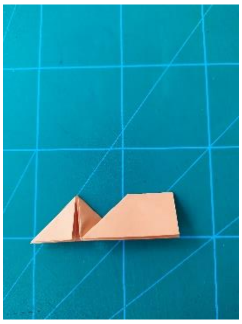
3.3. PHiZZ modulua

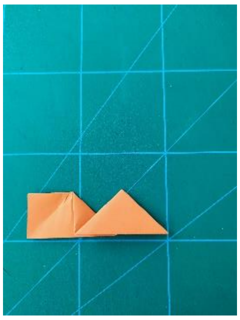
PhiZZ modulua (*pentagonal-hexagonal-zig-zag*) Thomas Hull matematikariak asmatu zuen. Karratu batetik abiatu behar da modulu hau lortzeko. Izenak berak esaten duen moduan, modulu honekin lor daitezkeen poliedroen aurpegiak soilik pentagonoak edo hexagonoak dira; eta horiek erpin bakoitzean hiru modulu mihiztatuz eraikiko dira. Era horretan sortutako egitura poliedrikoak nahiko sendoak izango dira. Adibidez, toru geometrikoa, dodekaedroa, fullerenoaren egitura edo futboleko baloia, eta beste gainazal batzuk.

Eraiki dezagun PhiZZ modulua:

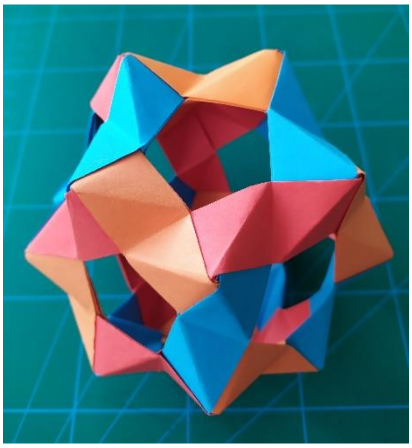






Orain hiru modulu mihiztatu behar ditugu erpin bat lortzeko, bideo honetan ageri den moduan:



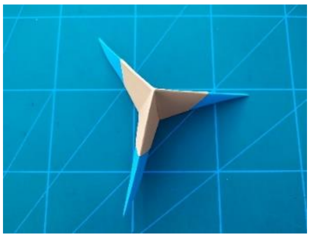
Halaber, 30 modulu lotuz gero, dodekaedroa eraiki daiteke (ikusi irudia).

60 modulurekin ikosaedro izartua (egin klik hemen irudia ikusteko). Torua, berriz, 360 modulurekin lortzen da.

3.4. GIROSKOPIO MODULUA

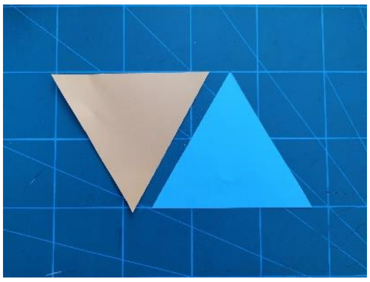
Giroskopio modulua izenarekin bi modulu desberdin izendatzen dira, hala nola hiru puntako modulua eta lau puntako modulua. Lehenengo moduluaren abiapuntua triangelu aldekidea da, eta bigarrenarena karratua.

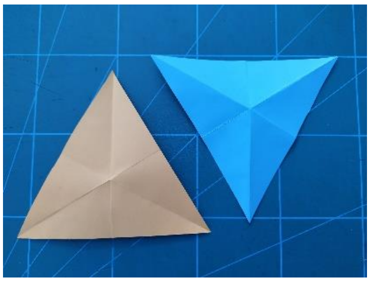
3.4.1. HIRU PUNTAKO GIROSKOPIO MODULUA



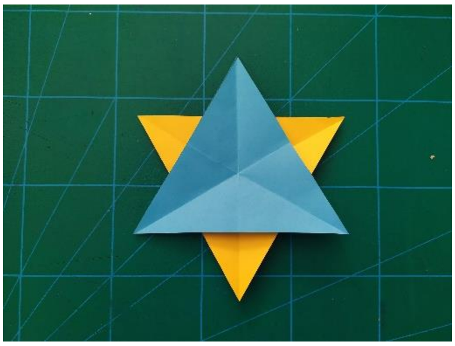
Tamaina bereko bi triangelu aldekidetatik abiatuko gara modulua eraikitzeko. Horiek konpasa eta erregela erabilita lor ditzakegu; edo, bestela, papiroflexiaren bidez, pauso gutxitan karratu batetik abiatuta (ikusi bideo hau).

Paperezko triangelu bakoitzean, hiru erdibitzaileak tolestu behar ditugu. Gogoratu dezagun triangelu aldekide batean erdibitzaileak, altuerak, erdibidekoak eta erdikariak bat egiten dutela, eta, ondorioz, haien ebaki-puntuak ere bat datoz (zirkunzentroa, ortozentroa, barizentroa eta inzentroa).



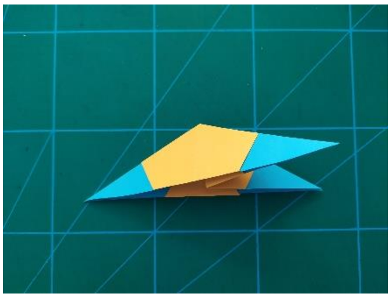
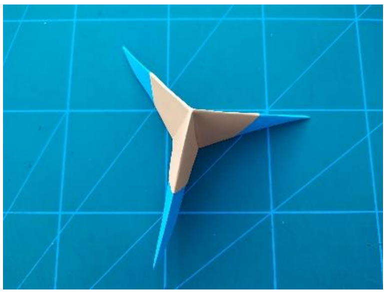


Jarraian, bi triangeluak bata bestearen gainean kokatuko ditugu; sei puntako izar bat eratuko da horrela.

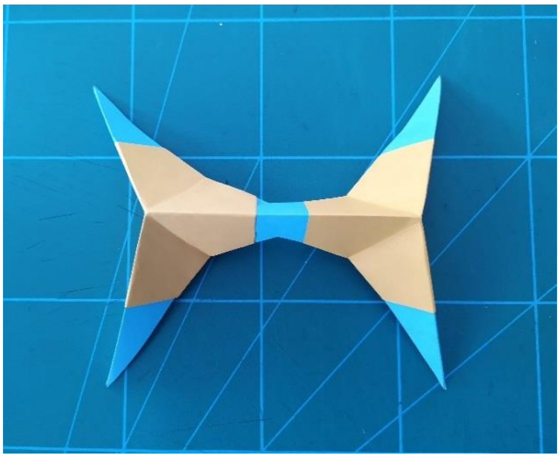
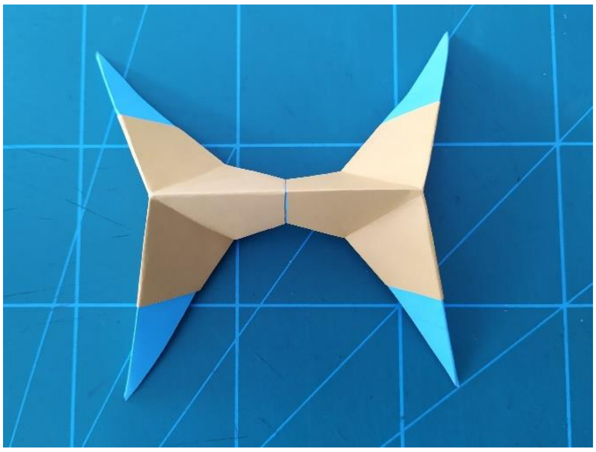


Azpiko triangeluaren puntak gainekoaren gainetik tolestuko ditugu, bi triangeluek bat egin dezaten.

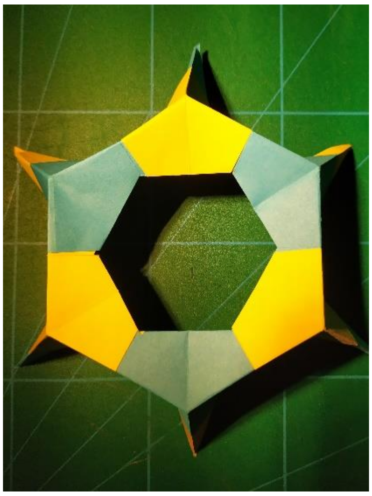
Forma ematen hasteko, triangelu sortu berriaren aldeak barrurantz tolestuko ditugu alde bakoitzaren erdigunetik. Lehenik, alde bat tolestuko dugu barrurantz, eta, tolesturaren eraginez, triangeluaren bi erpin hurbiltzen hasiko dira, beraz, elkartu egingo ditugu; gero prozesu bera egingo dugu triangeluaren beste bi aldeetan ere. Horrela, hiru puntako giroskopio modulua lortuko dugu.

Moduluak elkartzeko, modulu baten punta beste moduluaren puntatik sartuko dugu (ikusi irudia).

Moduluak uztartuta, pentagonoak eta hexagonoak eraikiko ditugu.

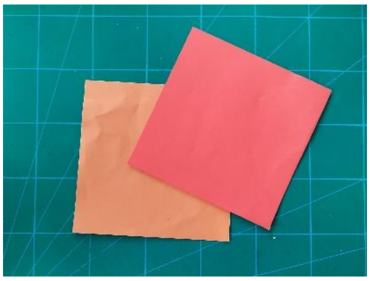


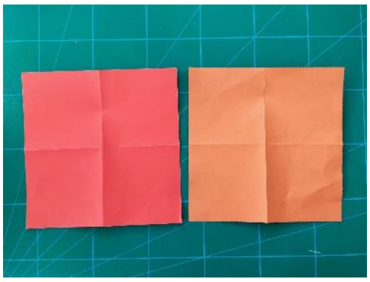
Horrez gain, 20 modulurekin dodekaedroa eraikitzen da eta 60 modulurekin ikosaedro moztua. Azken gorputz geometriko horrek 32 aurpegi (12 pentagono eta 20 hexagono), 90 ertz eta 60 erpin ditu. Betetzen da Eulerren teorema ikosaedro moztuan?

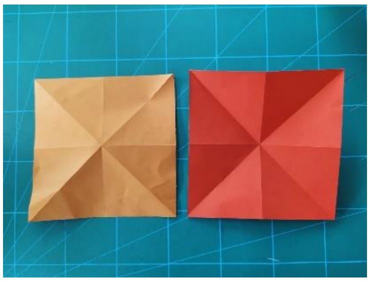
Ikusi bideo hau ikosaedro moztua nola muntatzen den jakiteko; bideoan hiru puntako giroskopio moduluekin oktaedro moztua eta prisma hexagonala ere eraiki daitezkeela ikusten da.

3.4.2. LAU PUNTAKO GIROSKOPIO MODULUA

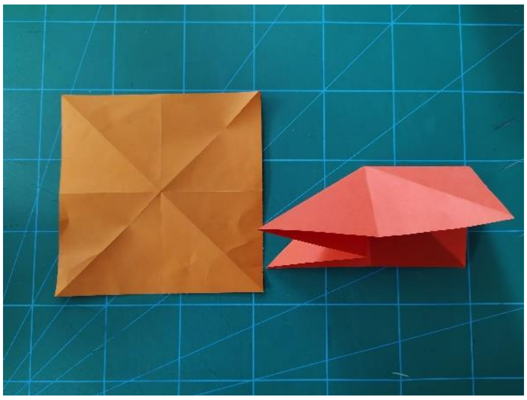
Tamaina bereko bi karratu behar ditugu modulu hau eraikitzeko. Oinarrizko modulua egin baino lehen, tolestura batzuk egingo ditugu. Lehenbizikoz, karratuen bi erdibitzaileak egingo ditugu, eta, jarraian, bi diagonalak.



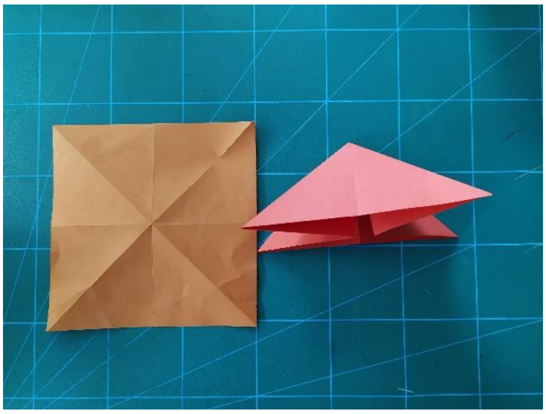




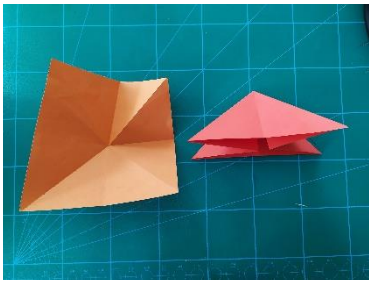
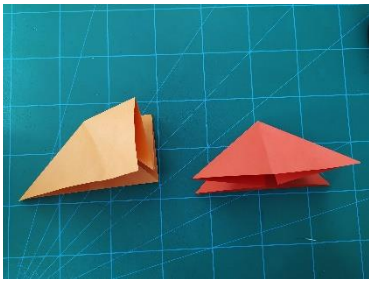
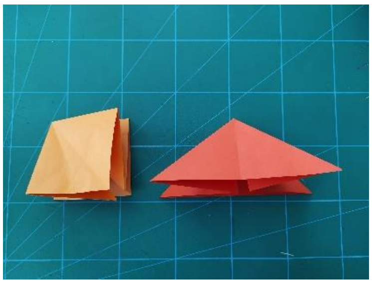
Ondoren, karratu bakoitzaren erdiko puntutik alde bat barrurantz tolestuko dugu eta bi erpinek bat egingo dute.



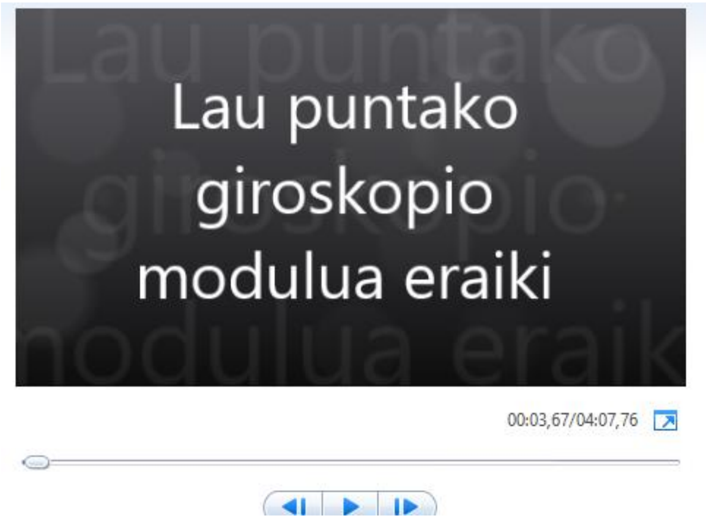
Amaitzeko, beste aldetik, prozesu bera errepikatuko dugu.



Behin aldeen erdibitzaileak eta diagonalak eginda, bigarren karratua beste modu batez tolestuko dugu (ikusi argazkiak).

Bideo honetan, lau puntako bi giroskopio modulu nola mihiztatu ikusiko dugu.



Modulu horiekin oktaedroa (6 modulurekin), kuboktaedroa (12 modulurekin) eta antiprisma karratua (8 modulurekin) eraiki daitezke.

.

BIBLIOGRAFIA ETA WEBGRAFIA

Bibliografia

- 236/2015 DEKRETUA, abenduaren 22koa, Oinarrizko Hezkuntza curriculuma zehaztu eta Euskal Autonomia Erkidegoan ezartzen duena.

- OINARRIZKO HEZKUNTZAKO CURRICULUMA (236/2015eko Dekretuaren II. Eranskina osatzen duen curriculum orientatzailea).

Webgrafia

- *STEAM EUSKADI,* Eusko Jaurlaritzako Hezkuntza Saila http://steam.eus/es/ **(kontsulta-data: 2019-09-15)**

- *GEOGEBRA. DESCUBRE LAS MATEMÁTICAS CON GEOGEBRA* https://www.geogebra.org/?lang=es-ES **(kontsulta-data: 2019-09-15)**

- *SURFER. IMAGINARY OPEN MATHEMATICS* https://imaginary.org/es/program/surfer **(kontsulta-data: 2019-09-15)**

- *TAKAHAMA TOSHIE* http://www.loveorigami.info/oriwiki/Takahama_Toshie **(kontsulta-data: 2019-11-21)**

- *MITSUNOBU SONOBE* https://en.wikipedia.org/wiki/Sonobe **(kontsulta-data: 2019-09-11)**

- *ESTUDIO PACK,* Esperanza Moreno eta Rubén Alonso https://mimina-cosas.tumblr.com/post/134076561887/sonobe06-fc001 **(kontsulta-data: 2019-09-15)**

- *EL ROBOT ORIGAMI COMESTIBLE QUE TE SALVARÁ LA VIDA.* Play Ground https://www.youtube.com/watch?v=jCtuPBCHsF4 **(kontsulta-data: 2019-10-13)**

- *EL ORIGAMI COMO INSPIRACIÓN DEL DISEÑO Y LA TECNOLOGÍA*, Angel Galicia http://galahadstudio.com/origami-diseno-y-tecnologia/ **(kontsulta-data: 2019-10-17)**

- *FLEX BATTERY VIDEO*, HANGING, Jiang https://www.youtube.com/watch?v=XvJGHHLXdjA Arizona State University. **(kontsulta-data: 2019-10-22)**

- *A DRONE WITH A ROBOTIC ORIGAMI CLAW THAT PICKS THINGS UP,* Quartz https://www.youtube.com/watch?time_continue=3&v=tpc9fF8idAU&feature=emb_logo. California Institute Technology **(kontsulta-data: 2019-10-15)**

- *HOW NASA ENGINEERS USE ORIGAMI TO DESIGN FUTURE SPACECRAFT*, Seeker https://www.youtube.com/watch?v=Ly3hMBD4h5E&feature=emb_logo **(kontsulta-data: 2019-12-11)**

- *CUBO DE MENGER 1: LOS MODULOS,* IES SANTAYANA http://blog.iesjorgesantayana.es/cubo-de-menger-1-los-modulos/ **(kontsulta-data: 2019-12-12)**

- *FRACTALES. VIRTUAL AND MANIPULATIVE GEOMETRICAL AND TOPOLOGICAL GAMES*, Universidad de Almería https://topologia.wordpress.com/2008/12/22/fractales/ **(kontsulta-data: 2019-12-12)**

- *MATHEMATICAL ART GALERIES,* Helena Verrill http://gallery.bridgesmathart.org/exhibitions/2019-bridges-conference/helenaverrill **(kontsulta-data: 2019-10-02)**

- TOMM HULL´S HOME PAGE, Tom Hull http://origametry.net/ **(kontsulta-data: 2019-10-02)**

- *GEOMETRÍA MANIPULATIVA,* Fernando Blasco https://blogs.upm.es/geomani/2017/09/19/poliedros-modulo-phizz/ **(kontsulta-data: 2019-10-07)**

- *BLOG SOBRE MATEMÁTICAS,* David Crespo http://matesdedavid.blogspot.com/2016/04/toro-de-papiroflexia-360-modulos-phizz.html **(kontsulta-data: 2019-10-10)**

- *TRIANGULO EQUILATERO*, Javier Caboblanco https://www.youtube.com/watch?v=evVktx9pjgM **(kontsulta-data: 2019-10-11)**

- *MIS FÓRMULAS DE POLIEDROS*, Hernán Dominguez https://matematicasiesoja.files.wordpress.com/2013/09/formulas_de_poliedros_-_trabajo_de_un_alumno_1_.pdf **(kontsulta-data: 2019-12-04)**

- *PAPIROFLEXIA. ICOSAEDRO TRUNCADO*. Matet0d0 https://www.youtube.com/watch?v=RsTWAIIhUZU&feature=youtu.be **(kontsulta-data: 2019-12-05)**

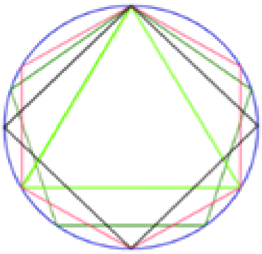
- *OCTAEDRO CON MÓDULOS GIROSCOPIOS CON CUATRO PUNTAS,* Grupo Alquerque
  https://www.youtube.com/watch?v=MJXs9Tcn1XA **(kontsulta-data: 2019-10-11)**

- *ORIGAMI MODULAR. CUBO-OCTAEDRO*, Origaming
  https://www.youtube.com/watch?v=5KDZvUb1ZiY **(kontsulta-data: 2019-12-04)**

- *ANTIPRISMA CUADRADO CON MÓDULOS GIROSCOPIOS*, Grupo Alquerque
  https://www.youtube.com/watch?v=I1OJIXk6OIQ&feature=youtu.be **(kontsulta-data: 2019-12-04)**

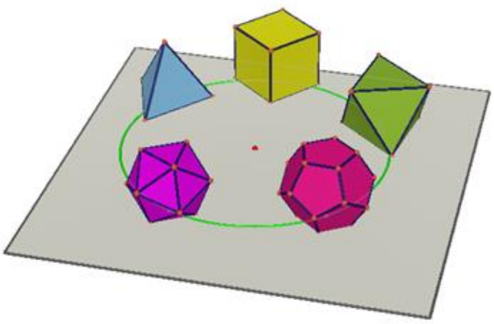
4. KONTZEPTU GEOMETRIKOAK

Einsteinek esaten zuen gure unibertsoa ulertzeko geometria jakinduriaren oinarria dela. Izan ere, naturak matematikaren bitartez hitz egiten du; hau da, matematikak naturaren egitura osoa ordenatuko luke. Berdin da atomoa edo galaxia izan, ordenatzeko era antzekoa baita. Bestalde, hizkuntza horren *karaktereak* triangeluak, laukiak, zirkuluak, pentagonoak eta hexagonoak izan ohi dira (ikusi bideo hau).

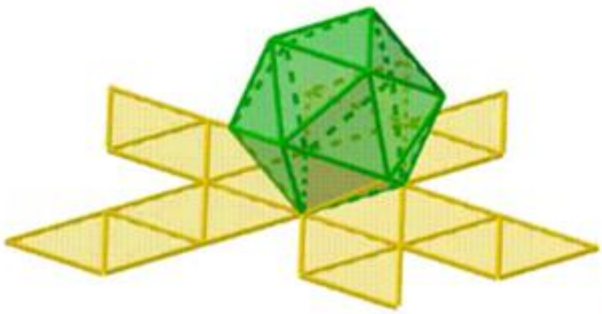


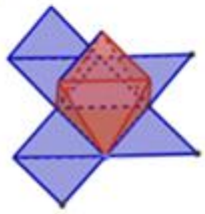
Halaber, geometriarekin lotura handia duen jarduera papiroflexia edo *origami*a da. Paper lau batetik abiatuta, eraikuntza miresgarriak lor daitezke hainbat arlotan, hala nola artean eta ingeniaritzan.

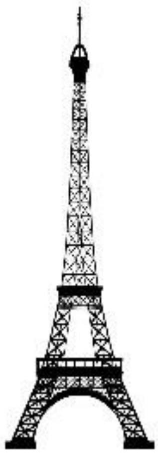
Egitasmo honetan, papiroflexiaren bitartez, matematikako oinarrizko kontzeptu geometrikoak landuko ditugu, eta helburua da geometria eskuekin lantzea eta gure munduko formak ulertzea. Paper bat eskuinerantz edo ezkerrerantz tolesteak baldintzatuko du zer irudi lortuko dugun; gure aurrean, emeki-emeki, aukera infinituak dituen sortze-prozesua irekiko da.



4.1. TRIANGELUA







Triangelua oinarrizko forma da, irudi lauen azalerak kalkulatzeko. Horregatik, errealitatean edozein formatako azalak triangelukatu egiten dira, azalera kalkulatu ahal izateko. Are gehiago, arkitekturan, distantziak luzeegiak direnean, triangeluak erabiliko dira gilbordura ekiditeko, hau da, egitura erresistenteagoak eraikitzeko; modu horretan, pisuaren indarrak hobeto banatzen baitira. Eiffel dorrea da horren adibide argia.

Oinarrizko kontzeptuak:

- Edozein motatako triangelu baten angeluen batura 180º da (ikusi bideoa).
- azalera = (oinarria x altuera) / 2

1. **JARDUERA**

Bideoan ikusi dugunez, edozein formatako triangelu baten angeluen batura 180º da. Bertan, triangeluaren altuera bat lortu da tolestura batekin. Adierazi zein tolesturarekin lortzen den altuera hori.

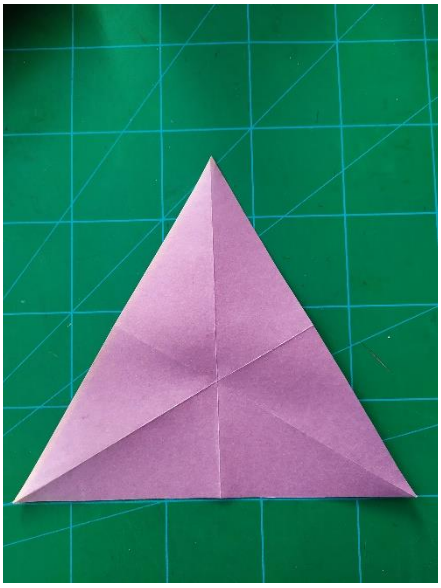
Orain, edozein triangeluren puntu eta zuzenki nabariak papiroflexiaren bidez lortuko ditugu. Horretarako, irudikatu erregelaz lau triangelu eskaleno eta moztu artaziekin. Atal bakoitzean deskribatzen diren zuzenkiak papera tolestuta egingo ditugu honako argibide hauek aintzat hartuta:

- Altuera deritzo alde batetik kontrako erpinera trazatutako perpendikular bakoitzari. Beraz, hiru altuerak tolestutakoan, horiek puntu batean elkar ebakitzen dutela ikusiko dugu.
- Triangelu baten erdibitzaileak triangeluaren aldeen erdiko puntuko perpendikularrak dira. Hiru erdibitzaileak tolestutakoan, horiek puntu batean elkar ebakitzen dute. Konpasarekin trazatu zentro horri dagokion zirkunferentzia.
- Erdikariak triangelu baten angeluak erditik zatitzen dituzten zuzenak dira. Hiru erdikariak tolestutakoan, horiek puntu batean elkar ebakitzen dute. Konpasarekin, trazatu puntu horri dagokion zirkunferentzia.

- Triangelu baten erdibidekoak alde baten erdiko puntutik kontrako erpinera trazatutako zuzenak dira. Hiru erdibidekoak tolestutakoan, horiek puntu batean elkar ebakitzen dute.

Puntu horiei guztiei nola deitzen zaie?

Orain, argazkietako triangeluetan, ikusgai ditugu zuzenki eta puntu nabariak. Izendatu denak banan-banan.



ZUZENKIA:_______________

PUNTUA:_________________

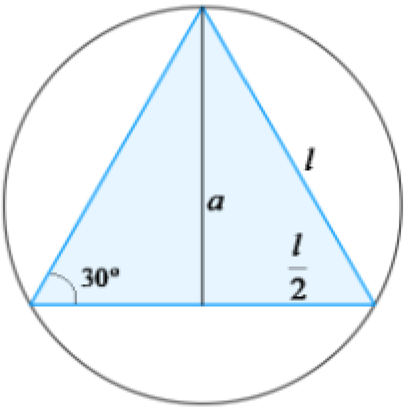
ZUZENKIA:______________________

PUNTUA:________________________

ZUZENKIA:________________ ZUZENKIA:_____________________

PUNTUA:__________________ PUNTUA_______________________

- **Triangelu aldekidearen ezaugarriak hauek dira:**



$a = altuera$

$l = aldea$

$P = perimetroa$

$A = azalera$

$P = 3 \cdot l$

$$A = \frac{oinarria \cdot altura}{2}$$

Beraz, Pitagorasen teorema aplikatzen badugu:

$$l^2 = a^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

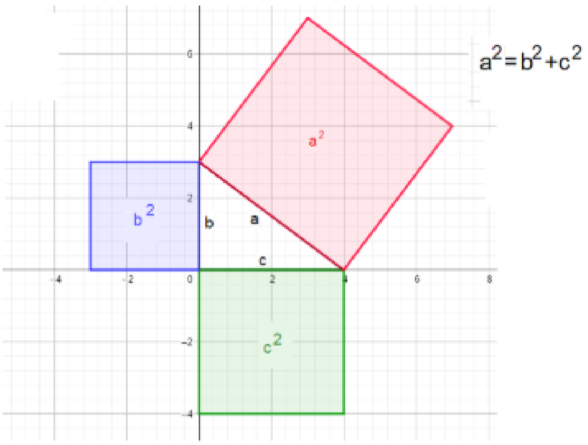
Triangelu aldekidearekin, gorputz geometriko erregular hauek eraiki daitezke: tetraedroa (4 triangelu), oktaedroa (8 triangelu) eta ikosaedroa (20 triangelu).

Pitagorasen teorema planoan

Pitagorasek eta haren eskola pitagorikoak, non emakumeen eta gizonen arteko parekotasuna aitortua baitzen, Pitagorasen teorema formulatu zuten. Matematika ez zen ezer izango erlazio hori gabe. Teorema honek triangelu zuzenen aldeen arteko erlazioa ezartzen du:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

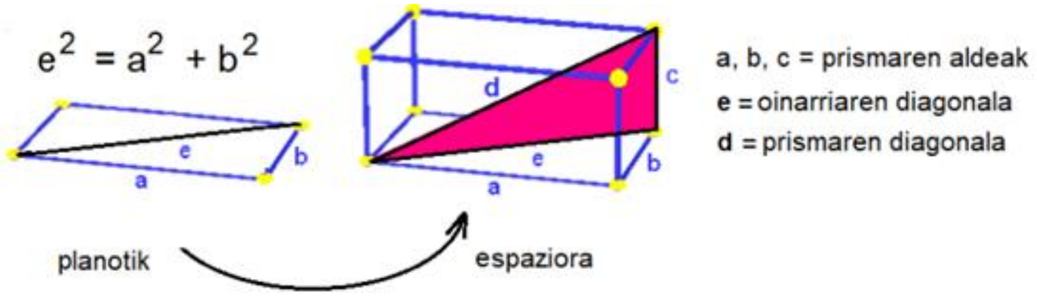
Hipotenusaren gainean eraikitako karratuaren azalera katetoen gainean eraikitako karratuen azaleren baturaren parekoa da.



2. JARDUERA

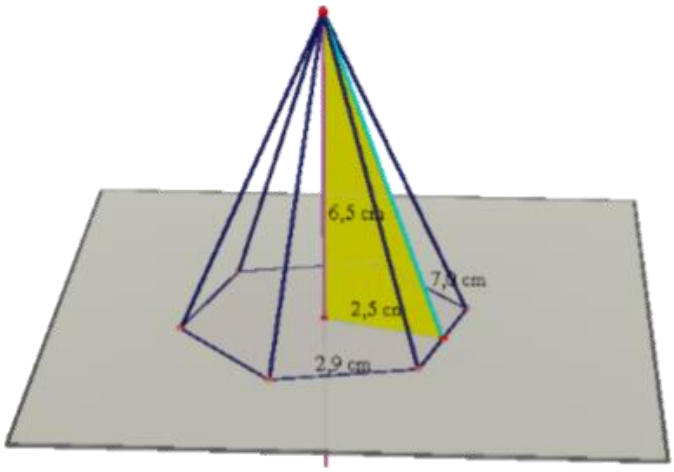
Esteka honetan, karratuaren puzzlearen bidez, egiaztatzen da Pitagorasen Teorema papiroflexia baliatuta. Eraiki dezagun teorema ospetsu hori!

Pitagorasen teorema: planotik espaziora



Beraz, prismaren diagonala kalkulatzeko: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

- **Piramide hexagonal batean Pitagorasen teorema egiaztatzeko:**



$$7 = \sqrt{2{,}5^2 + 6{,}5^2} \quad \checkmark$$

3. JARDUERA: eskuaira eta kartaboia larrialdietarako

Askotan, matematika- edo teknologia-saioetarako eskuaira eta kartaboia behar izaten ditugu, bereziki geometria edo pieza baten bistak lantzen ditugunean. Kasu horietan, linea paraleloak eta perpendikularrak marrazten dira, eta maiz baita 30º, 45º eta 60º-ko angeluak ere. Eskuaira eta kartaboiaren bidez, materiala eskuragarri daukagunean, hori guztia egitea oso erraza da. Baina batzuetan materiala etxean ahaztuta uzten dugu eta orduan arazoak!

Bada, kasu horietarako irtenbidea DIN-A4 orrien[3] eskutik lor dezakegu (ikusi bideoak).

Galdera:

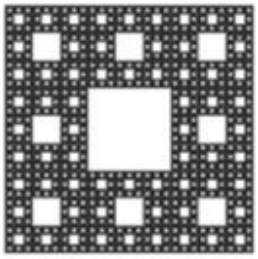
Nola lortuko zenituzke 15º eta 22,5º-ko angeluak *origamia*ren bidez?

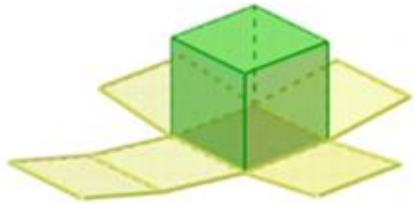
ARIKETAK

Hemen klikatuz gero, matematika-olinpiada bat prestatzeko hainbat ariketa aurkitu daitezke. Horietako askotan, Pitagorasen teorema aplikatu beharko dugu.

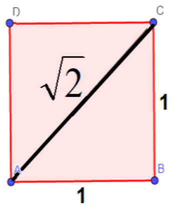
[3] GARRIDO, María Belén: *ORISANGAKUS. DESAFÍOS MATEMÁTICOS CON PAPIROFLEXIA*,. Real Sociedad Matemática Española eta ediciones SM, 2015.

4.2. LAUKIA



Antzina, Egipton eta Mesopotamian, geometria (*geo* = lurra, *metria* = neurketa) erregela enpirikoen multzoa zen, lurra neurtzeko erabiltzen zena. Garai hartan, zenbaki osoak eta zatikiarrak ezagutzen zituzten; baina, greziarrek zenbaki berezi batzuekin egin zuten topo. Horietako bat biren erro karratua da, hau da, karratu batetik atera daitekeen balioa. Eskuineko irudi honetan, Pitagorasen teorema erabilita lortu da balio hori.

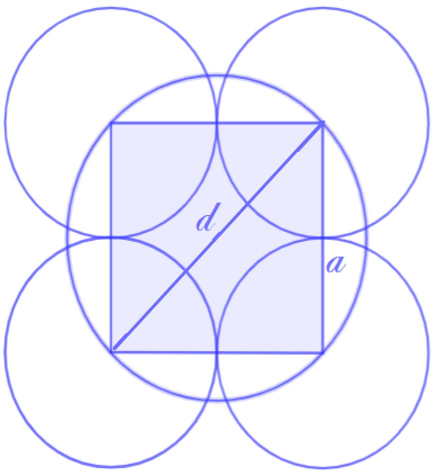


$$d = \sqrt{1^2 + 1^2}$$

$$d = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \approx 1{,}41421356237330950\ldots$$

- Karratuaren oinarrizko propietateak:

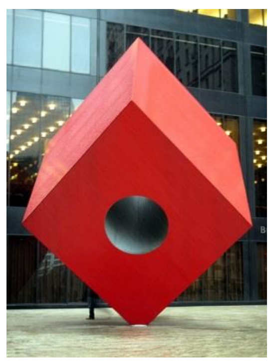


a = aldea
d = diagonala
P = perimetroa
A = azalera

$$A = a^2$$

$$P = 4 \cdot a$$

$$d = a \cdot \sqrt{2}$$

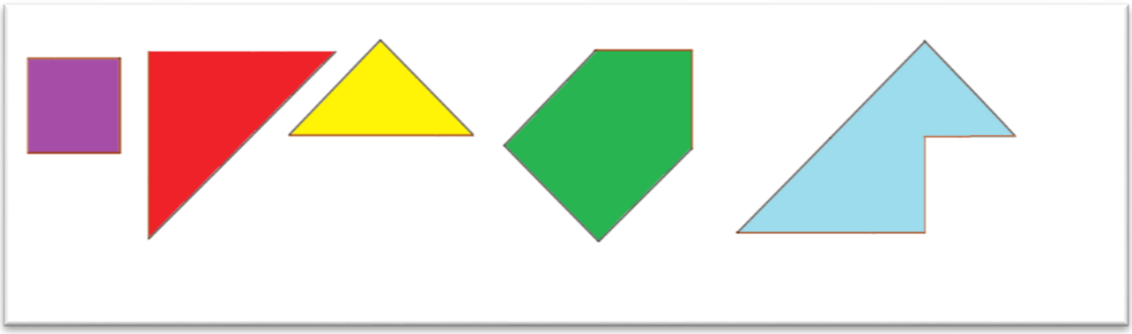


Red Cube Broadwayn, Isamu Noguchi, 1968

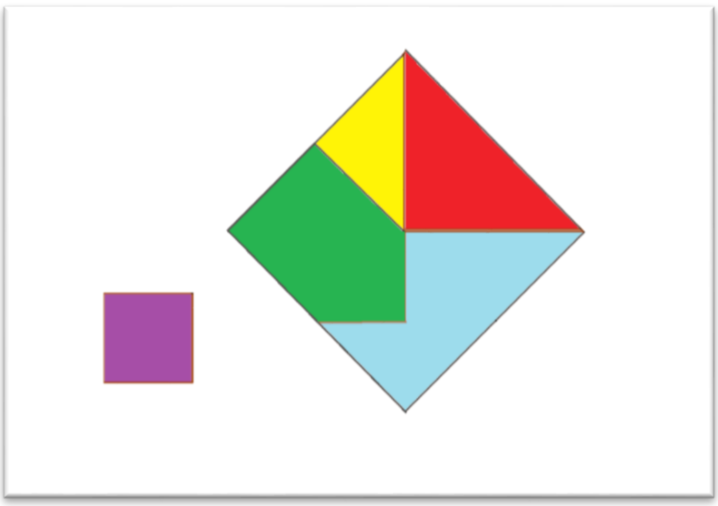
KARRATUAREN PUZZLEA

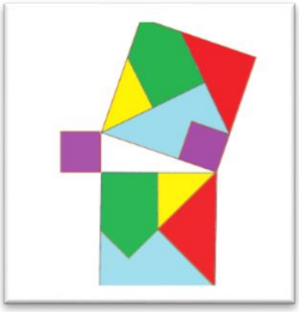
Antzinatik, zirkuluaren koadraturaren problemak hainbat buruhauste eragin du. Matematika-ariketa horrek askaezina dela ematen badu ere, irudi lau batzuk baino gehiago karratu bihur daitezke. Esteka honetan klik egin eta koadratura horren hainbat adibide aurkituko ditugu.

Papiroflexiak aukera bukaezinak ematen dizkigu irudi lauekin lan egiteko; horietako bat da karratuaren puzzlearen bitartez Pitagorasen teorema egiaztatzea. Puzzlea bost pieza hauekin osatuta dago:

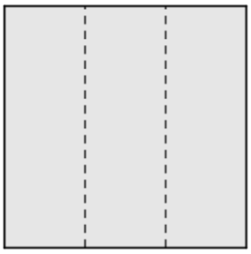


Pieza morea kenduko bagenu, beste karratu bat eraiki genezake:





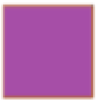
Eta hiru karratu horiekin nahikoa dugu Pitagorasen teorema egiaztatzeko.



Karratuaren puzzlearen bost piezak lortzeko Marc Kirschenbaum artistaren papiroflexia-eskemei jarraituko diegu. Horretarako, neurri bereko bost karratu behar ditugu, adibidez, aldea 20 cm-koa dutenak; eta horiek hiru zati berdinetan banatuko ditugu. Badaude hainbat metodo hiru zati berdin lortzeko, eta ikusgai ditugu bideo hauetan. Horietako bat Fujimotoren metodoa da, iterazioan edo konbergentzian oinarritzen dena; beste batzuk Alquerque taldeak aurkezten dituen diagramak dira.

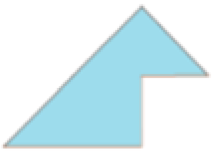
1. **JARDUERA:**

Orain bost pieza horiek eraikiko ditugu eta Pitagorasen teorema egiaztatuko dugu. Bideo hauetan ikus daiteke modulu bakoitza nola eraikitzen den:



Karratua eraiki.

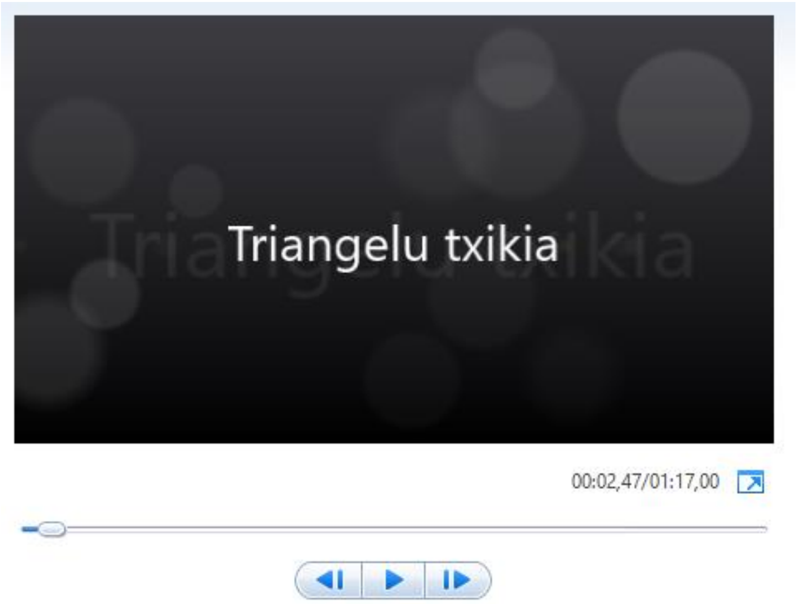
Pentagono ganbila eraiki.



Pentagono ahurra eraiki.

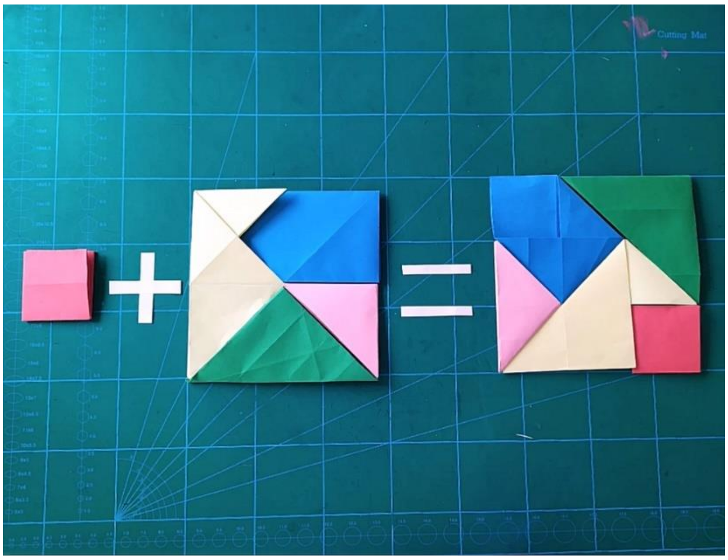
Triangelu handia eraiki.

Triangelu txikia eraiki.



Behar ditugun bost piezak eginda daudenean, karratua muntatuko dugu.

Eta hemen daukagu bilatzen genuen egiaztapena.



KARRATUA: PLANOTIK ESPAZIORA

2. JARDUERA

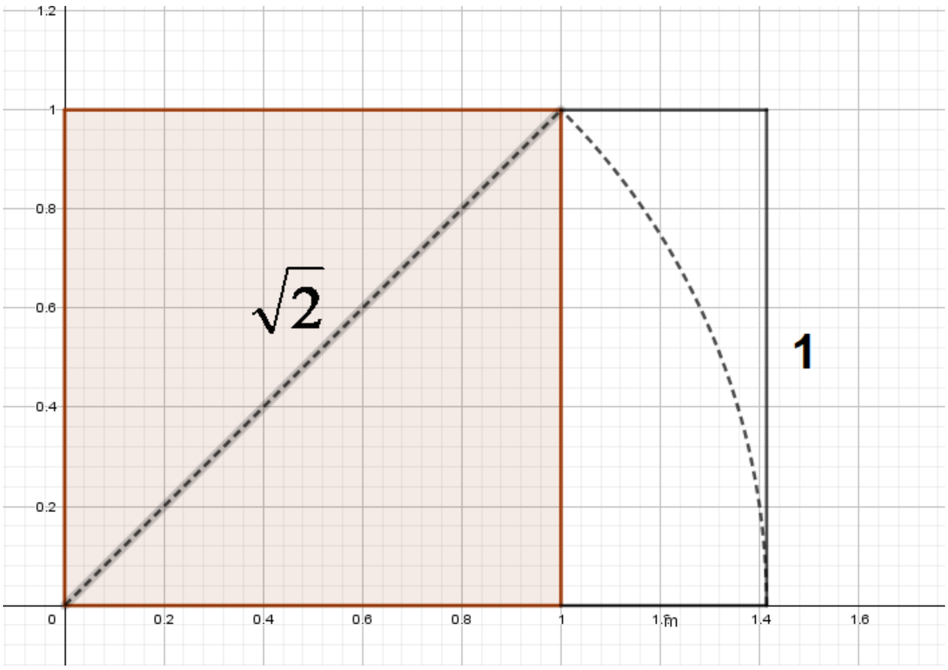
Karratuaren erpin bakoitzaren angelua 90º-koa da. Beraz, hiru karratu erpin batean elkartuz gero, kubo baten erpina sortzen da. Lau karraturekin, angeluen batura 360º izango litzateke eta irudi lau bat sortuko genuke.

Orain, Sonobe moduluaren bidez, kubo bat eraikiko dugu. Horretarako, 6 modulu berdin tolestuko ditugu eta, jarraian, mihiztatuko, bideo honetan ageri den moduan. Joan gaitezen kuboaren atalera eta erantzun diezaiegun jarduera horretako galderei.

LAUKIZUZEN BEREZI BATZUK

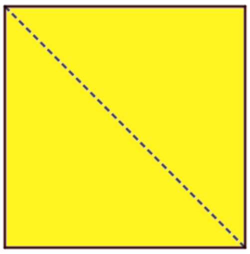
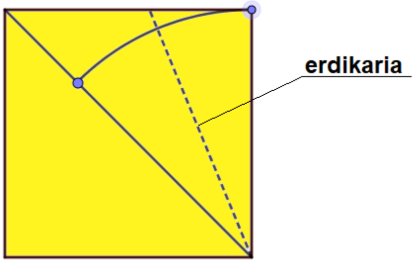
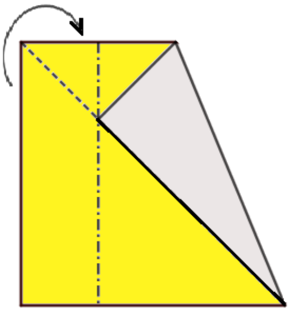
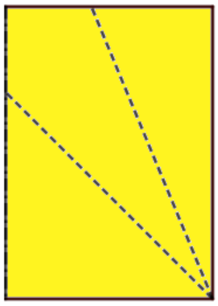
Karratu batetik abiatuta, laukizuzen ospetsu batzuk lor daitezke: biren erroko proportzioa duen laukizuzena, hiruren erroko proportzioa duen laukizuzena eta urrezko laukizuzena. Ikasi dugunez, zehatza ez den erro baten emaitzak infinitu zifra hamartar ditu; beraz, zehatzagoa da emaitza erro moduan adieraztea. Zenbaki horiei, hain zuzen, horregatik esaten zaie zenbaki irrazionalak. Eraiki ditzagun aipatutako hiru laukizuzen berezi horiek, alegia, zenbaki irrazionalen proportzioa duten laukizuzenak.

4.2.1. BIREN ERROKO PROPORTZIOA DUEN LAUKIZUZENA



Karratuaren atalean $\sqrt{2}$ adierazpena nondik datorren ikusi dugu. Bide batez, interesgarria da jakitea DIN formatuko paper-orri baten aldeen arteko proportzioa biren erroko proportzioa duen laukizuzen baten berdina dela.

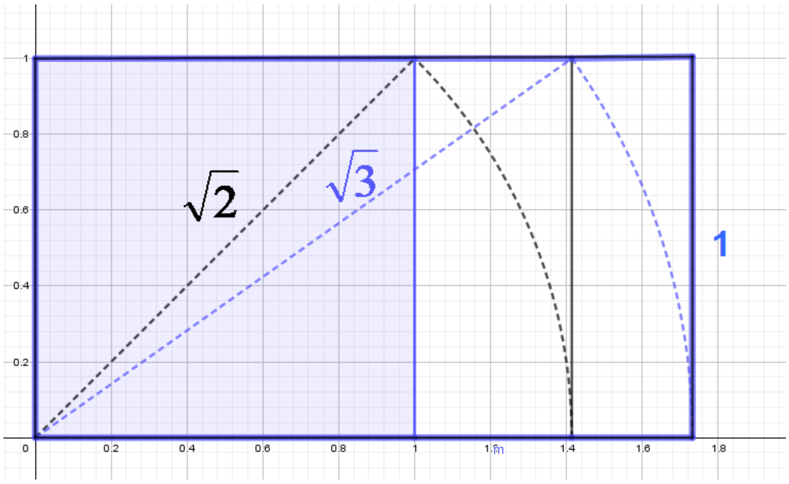
Orain erlazio hori duen laukizuzen bat lortuko dugu, papera tolestuz:

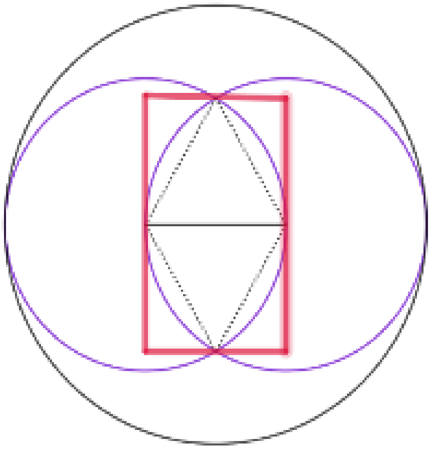
1. Karratua diagonaletik tolestuko dugu. 	2. Erpin bat diagonal horren gainera eramango dugu; tolestura horri  esker, erdikaria lortuko dugu.
3. Erpin hori diagonalarekin elkartzen den puntua kontuan hartuta, erpinaren kontrako aldea puntu horretaraino tolestuko dugu, alegia, karratuaren aldearekin paraleloa eginez. 	4. Erdikaritik egin dugun tolestura desegingo dugu. Horrela, laukizuzena agerian geratuko da. 

IKERKETA-JARDUERA:

Gaur egun erabiltzen dugun paperaren DIN-A0 formatua 1922. urtean sortu zen. Paper-fabrikek DIN formatuko dimentsioak ez zituzten edonola aukeratu. Ikertu ea zergatik egin zuten aukera hura. Horretaz gain, azaldu zertan datzan DIN-A0 formatua, eta nolatan den inplizitua biren erro karratua. Jarraian, eman horren berri ikasgelan. Bideo hau lagungarria izan daiteke.

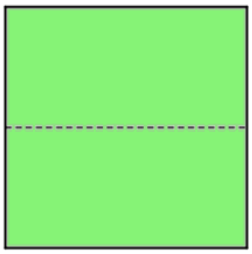
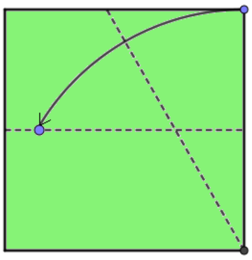
4.2.2. HIRUREN ERROKO PROPORTZIOA DUEN LAUKIZUZENA

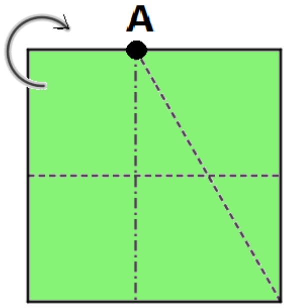
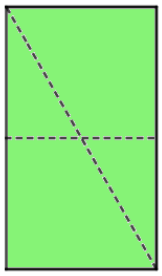


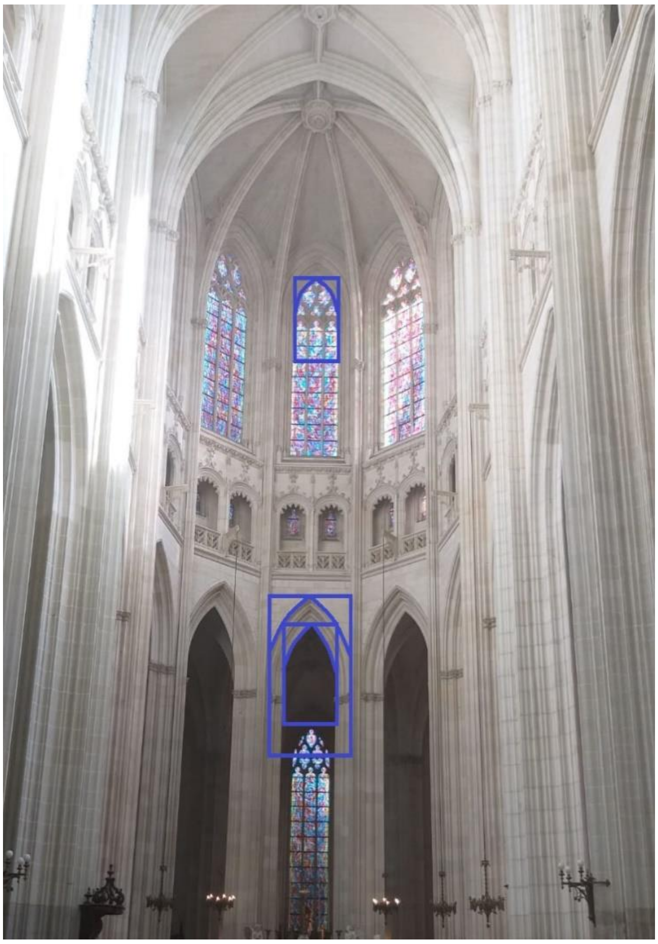


Laukizuzen hau garrantzi handikoa da geometria sakratuan; hain zuzen, *vesica piscis*en irudian parte hartzen du. Erromanikoan eta gotikoan, proportzio hau askotan erabiltzen zen artelanetan, bai arkitekturan, baita zizelkaritzan eta margolaritzan ere. Horretaz gehiago jakiteko, egin klik hemen.

Jarraian, hiruren erroko proportzioa duen laukizuzena paperez eraikiko dugu:

1. Hasteko, karratua erditik tolestuko dugu, erdibitzailea lortzeko. 	2. Erpin bat aurreko urratsean lortutako erdibitzailearen gainera eramango dugu, betiere erpin horren puntu simetrikotik tolestuz. 

3. Lortutako erpina *A* puntua izango da. Puntu horretatik, karratuaren ezkerreko aldearekiko tolestura paraleloa egingo dugu, eta papera atzerantz eramango. 	4. Horrela, $\sqrt{3}$ laukizuzena lortuko dugu. 



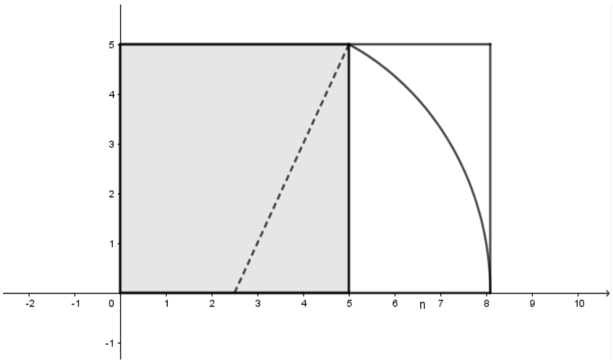
IKERKETA-JARDUERA:

Irudian, Nanteseko (Frantzia) katedralaren aldare nagusia daukagu. Arretaz aztertuz gero, arkuen goiko aldea *vesica piscis* irudiz beteta dagoela konturatuko gara. Hor daukagu hiruren erroko proportzioa duen laukizuzena.

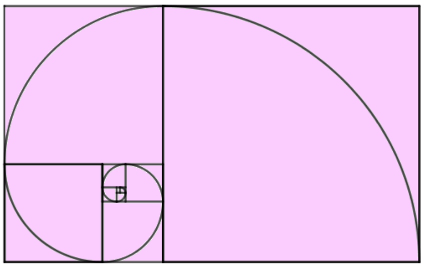
Gure erkidegoan, hainbat eraikin gotiko ditugu. Aukeratu horietako bat eta identifikatu proportzio hori non agertzen den. Prestatu aurkezpen bat powerpoint batean.

4.2.3. URREZKO LAUKIZUZENA

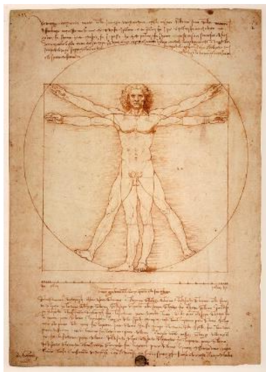
Urrezko laukizuzenean, alde handienean sortutako karratua kentzen badugu, beste laukizuzen bat geratzen zaigu, hasierakoaren proportzionala dena.



Urrezko laukizuzenarekin urrezko kiribila eraiki ahal da; gainera, prozesu hori infinitua da, laukizuzena txikituz edo handituz gero.

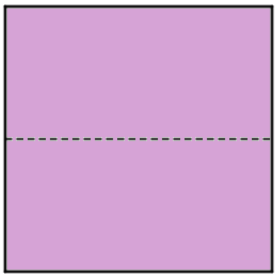
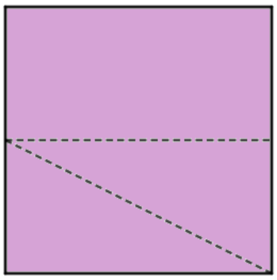
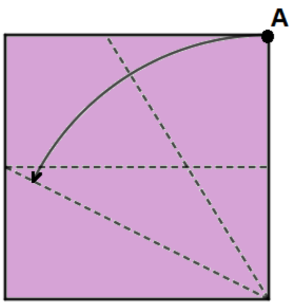
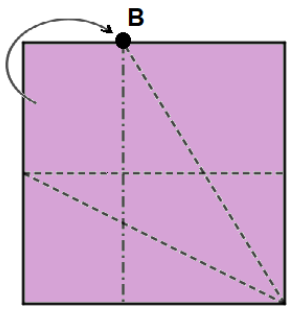
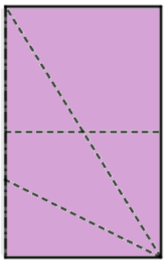


Berriro ere, kasualitate geometriko horiek naturan agertzen zaizkigu; azken finean, unibertsoak hedatzen denean eredu horri jarraitzen dio. Antzinako arkitektoek, margolariek eta artistek proportzio geometriko hori ezagutzen zuten, eta galdu ez diren hainbat artelanetan kode hori islatzen da. Garai hartako ordezkaririk ospetsuena Leonardo Da Vinci da; haren irudiak guztiok ezagutzen ditugu, eta horietatik esanguratsuena *Vitruviar gizona* da. Irudian ikusten denez, gizakiaren gorputzean ere urrezko erlazioa berez ageri da.



Laukizuzen honetan, aldeen arteko proportzioa zenbaki hau da: $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

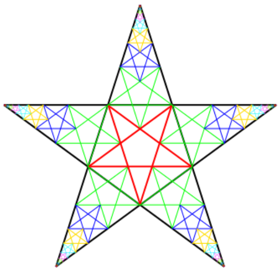
Orain, paperarekin eraikitzeko, pauso hauek eman behar ditugu:

<table>
<tr>
<td>1. Karratua alde baten erdibitzailetik tolestuko dugu, bi laukizuzen txiki lortzeko.
</td>
<td>2. Karratuaren erpinetako bat tolestuko dugu, laukizuzenetako baten diagonala lortzeko.
</td>
</tr>
<tr>
<td>3. A erpina aurreko pausoan lortutako diagonalaren gainera eramango dugu, erpin bat (B puntua izango dena) sortzeko.

</td>
<td>4. B puntutik karratuaren ezkerreko aldearekiko tolestura paraleloa egingo dugu, eta papera atzerantz eramango.

</td>
</tr>
<tr>
<td>5. Horrela, urrezko laukizuzena lortuko dugu.
</td>
<td></td>
</tr>
</table>

IKERKETA-JARDUERA:

Urrezko zenbakiak garrantzi handia duela ikusi dugu. Antzinako Greziako garaian, Errenazimentuan eta Aro Modernoan arkitektoek, margolariek eta eskultoreek proportzio hori kontuan hartzen zuten haien artelanak egiteko. Orain, aukeratu artelan bat edo eraikin bat eta azaldu hautatutako horretan urrezko zenbakia zergatik den inplizitua. Azaldu ikasgelan powerpoint baten bidez.

4.3. PENTAGONOA



Geometrikoki, bost zenbakia bost aldeko pentagono erregularrarekin irudikatzen da. Pentagonoa, irudi geometriko laua, askotan agertzen da naturan, eta estuki lotuta dago elementu bizidun askoren hazkundean ematen diren formarekin. Adibidez, madari bat edo sagar bat horizontalki ebakiko bagenu, ikusiko genuke hazien egitura pentagonala dela. Lore askok bost lore-hosto dituzte eta itsas-izarrek ere pentagono-egitura dute.

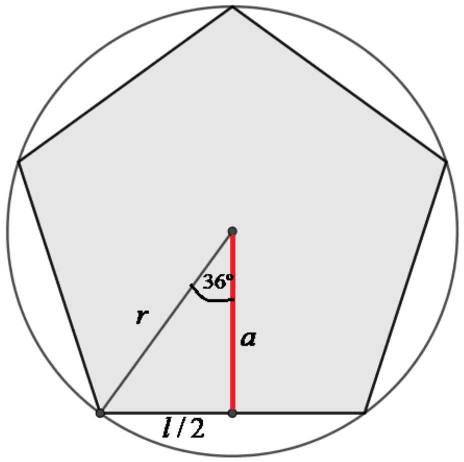
Simetria pentagonala fruten haziak kokatzean.

Aquilegia pyrenaicus.

Pentagonoa, sarri, Arabiako, Txinako eta Persiako dekorazioetan erabiltzen zen. Gainera, antzina, bost puntako izarrak balio sinbolikoa eta erlijiosoa zuen. Izar hori eskola pitagorikoaren sinboloa zen eta eskola logia sekretua zenez, sinboloaz baliatzen ziren elkar identifikatzeko.

Girih arabiar ornamentuak. Argazkia: Patrick Ringgenberg, 2008.

- **Irudian pentagonoaren ezaugarri nagusiak ikusten dira:**



$P = perimetroa$
$A = azalera$
$l = aldea$
$a = apotema$
$r = zirkuluaren\ erradioa$

$$P = 5 \cdot l$$

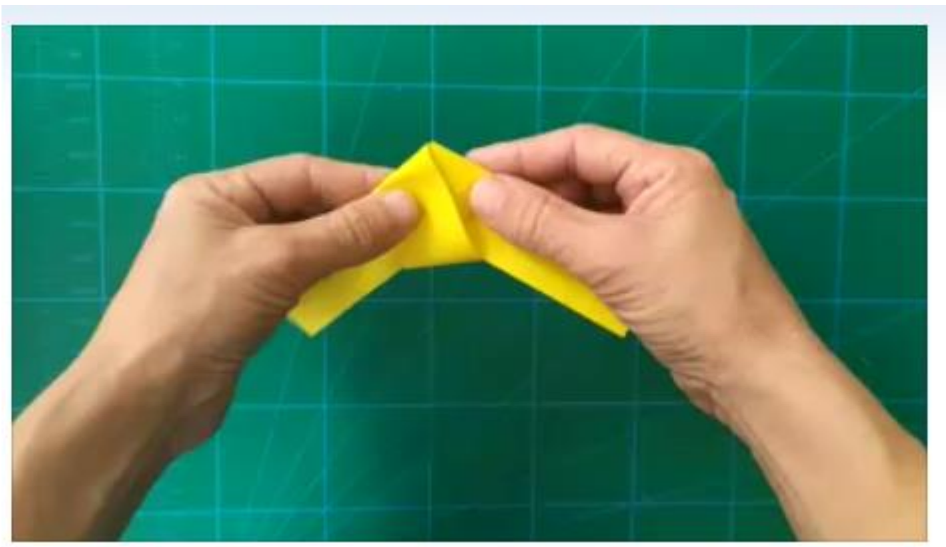
$$A = \frac{perimetroa \cdot apotema}{2}$$

Pitagorasen teorema aplikatzen badugu:

$$r^2 = a^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

1. JARDUERA

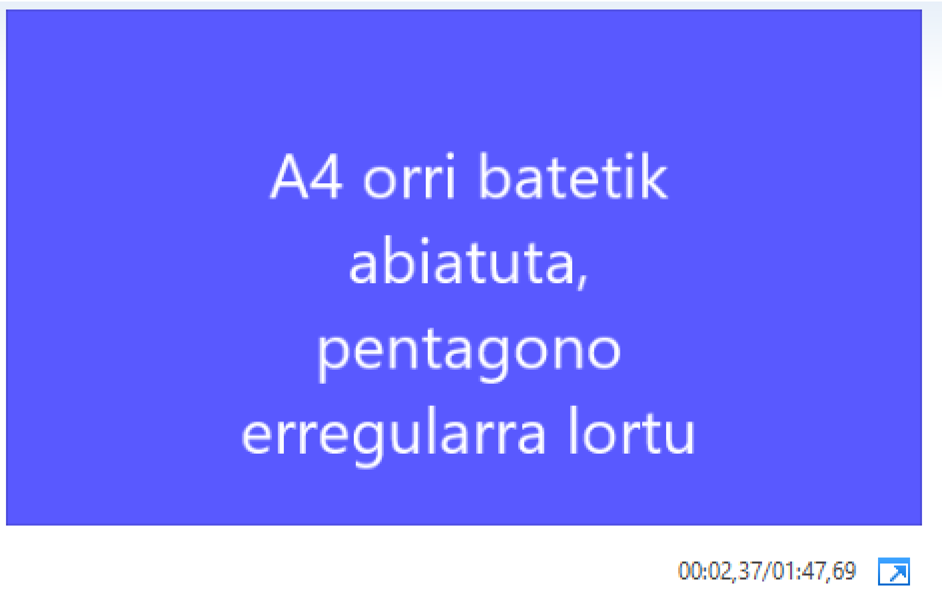
Pentagono erregularra erraz eraiki daiteke papiroflexiaren bidez. Horretarako, paperezko 3 cm-ko zerrenda bat behar dugu; horri korapilo bat eginda berehala lortuko dugu (ikusi bideoa).



Ariketak:

- Zer neurri dute pentagonoaren aldeak, perimetroak eta apotemak?
- Ondorioztatu formula bat azalera kalkulatzeko.
- Aurkitu zirkunferentziaren zentroa, pentagonoa inskribatuta gera dadin.

Jarraian, A4 orri batetik abiatuta, beste pentagono erregular bat eraikiko dugu (ikusi bideoa). Ondoren, sorturiko pentagonoa kontuan hartuta, aurreko ariketak errepikatuko ditugu.



PENTAGONOA: PLANOTIK ESPAZIORA

2. JARDUERA

Pentagono erregularrak erpin bakoitzean duen angelua 108º-koa da. Horri esker, hiru pentagono erpin batean elkartuz gero, 360º baino gutxiagoko angelua osatzen da, eta, beraz, bolumendun forma bat ager daiteke. Pentagono erregularra ez balitz, sortutako forma laua izango litzateke. Bada, hamabi pentagono erregularrekin dodekaedroa eraiki daiteke, adibidez, 30 PHiZZ modulu mihiztatuz (ikusi [bideo hau]). Dodekaedroa eraikitzeko garaian, erronka handia da soilik hiru kolore erabiltzea eta erpin guztietan beti hiru kolore horiek agertzea.

Beste egitura bat 36 PHiZZ modulurekin eraiki daiteke, eta horrek 12 pentagono eta 2 hexagono izango lituzke.

Orain erantzun galdera honi: poliedro hori erregularra da?

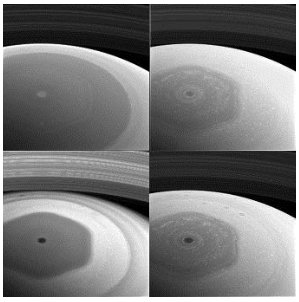
Bestalde, fullereno substantzia kimikoaren egituran edota narruzko futbol-baloietan ere pentagonoak agertzen dira, hain zuzen, 12 pentagono eta 20 hexagono. Horrelako baloiak lortzeko, 90 PHiZZ modulu behar dira. Horrela, futbol-baloiak forma poliedriko hori hartzen du. Bideo honetan, formari dagokionez, baloi horiek azken urteetan izan duten bilakaera ikus dezakegu. Horren inguruko erakusketa bat Bilbon dago, Athletic futbol-taldearen museoan.

4.4. HEXAGONOA

Maite ditu naturak hexagonoak?

Berdin da nora begiratzen dugun; gure ingurua aztertzen badugu, forma geometrikoz beteta dagoela konturatuko gara. Baina badirudi naturak forma geometriko batzuk gustukoago dituela. Harriak, intsektuak, loreak, elur-malutak… guztiak hexagonozaleak dira. Kointzidentzia ote da? Ikusi bideo honetan azalpena.

Naturan hexagonoak edonon agertzen dira; gezurra badirudi ere, Saturno planetak bere hexagono propioa du Ipar poloan. Hexagono hori Voyager misioak begiztatu zuen lehenengo aldiz 1981-82an eta NASAko Cassini misioak 2006an fotografiatu zuen.

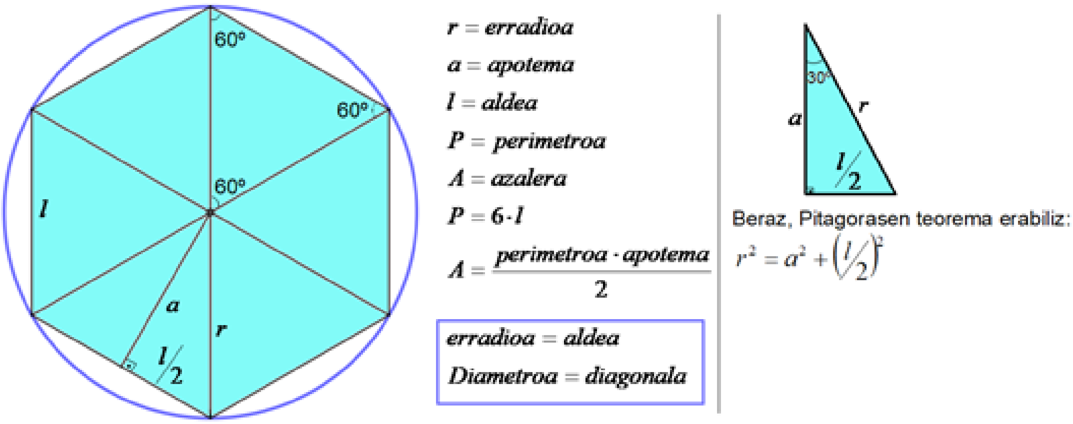


Saturnian Hexagon Collage, Cassini Huygens misioa, 2006.

Hexagono horren aldea 13.800 km-koa da, hau da, lurraren diametroa baino handiagoa. Antza denez, poloetako haize-zurrunbiloak sortua da (ikusi bideoa).

- **Hexagonoaren ezaugarriak**

Irudi erregular guztien artetik, soilik hexagonoak ditu aldea eta zirkunskribatutako zirkuluaren erradioa berdinak.



Egia ote da ez direla bi elur-maluta berdin existitzen?

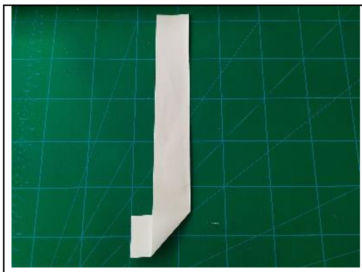
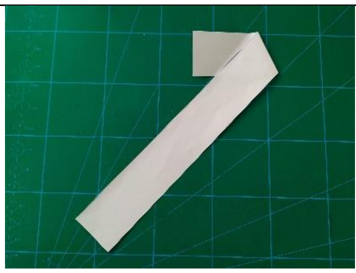
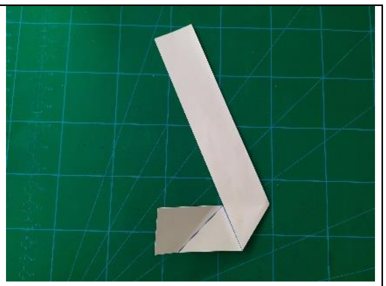
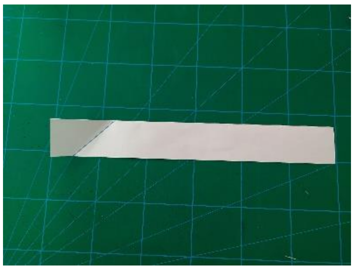
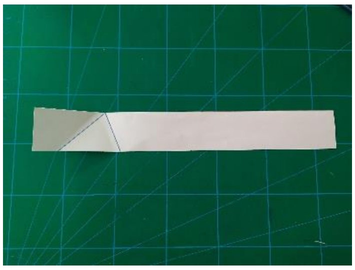
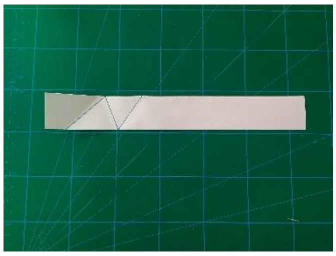
Baliteke bi elur-maluta berdin ez existitzea; izan ere, elur-malutak eratzea izugarri konplexua da. Zientifikoek ere ez dakite ziurtasunez izotz-kristalek zergatik hartzen dituzten forma desberdinak tenperatura desberdinetan. Elur-maluta batean 10^{18} ur-molekula daudela zenbatetsi daiteke, eta horiek infinitu forma desberdinetan ordenatu daitezke. Beraz, bi elur-maluta berdin eratzeko probabilitatea estatistikoki oso txikia da.

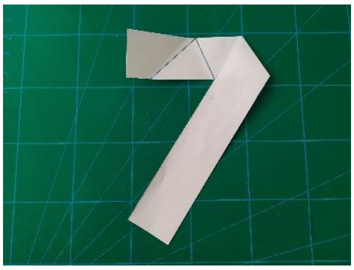
Nolanahi ere, dakiguna da elur-maluta guztien forma hexagonala dela. Bideo honetan, Slava Ivanov-ek elur-maluta bat nola sortzen den erakusten digu; ikuskizuna zoragarria da. Bestalde, kontuan hartu behar dugu hauts-izpiek ere eragina dutela eratze-prozesu horretan.

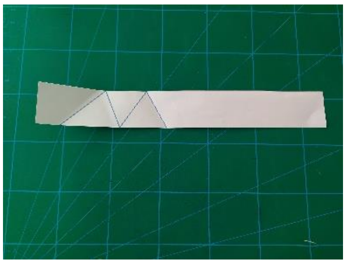
1. JARDUERA

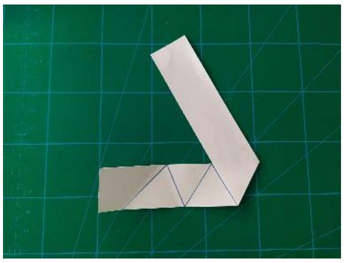
Sei triangelu aldekiderekin hexagonoa eraiki daiteke; nola lortu, ordea, triangelu aldekidea? Bada, paperezko zerrenda batekin nahi beste triangelu aldekide egin daitezke.

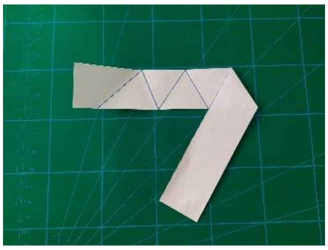
Hexagonoa eraikitzeko paperezko zerrenda nahi dugun lekutik tolestuko dugu eta, jarraian, desegin egingo dugu. Zerrendako alde luzea sortutako tolesturara eramango dugu, eta prozesu hori paper-zerrenda bukatu arte errepikatuko dugu. Paperezko zerrenda egindako tolesturetatik biratzen hasiz gero, erraz sortuko da hexagonoa.

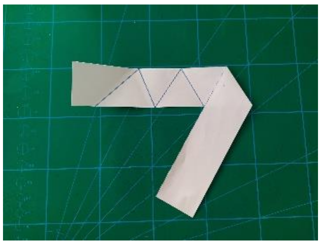
		
		

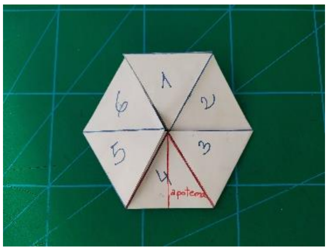












Eman beharreko hurrengo pausoa da hexagonoaren azalera kalkulatzeko metodo bat deduzitzea.

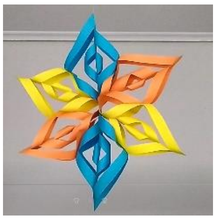
Ondoren, aldea eta hexagonoa zirkunskribatzen duen zirkunferentziaren erradioa berdinak direla egiaztatuko dugu.

- **Hexagonoa: planotik espaziora**

Lehenengo aldiz fotografiatu zirenetik, elur-maluten xarmak jakin-min handia sortu du zientzialarien artean. Batzuek esaten dute urak memoria duela eta baita bere hizkuntza propioa ere. Esate baterako, Masaru Emoto zientzialariak baieztatu zuen ur-bolumen bati bidalitako pentsamenduak kristal-izotzen forman eragiten duela; ez hori bakarrik, gainera, pentsamenduen arabera (positiboak edo negatiboak izan) kristalek forma bat edo bestea hartzen dutela. Ezbairik gabe, baieztapen horrek eztabaida handia sortu zuen mundu zientifiko tradizionalean.

Beste alde batetik, Peter Dahmen artista eta paper-diseinatzaile alemaniarra ere elur-maluten diseinuan oinarritu zen haren *Letters from the sky* arte-lana egiteko. Proiektu horretan sei hexagonorekin milaka konbinazioko egitura bat sortu zuen, hain zuzen ere, 44716 konbinaziokoa. Horren inguruko azalpen matematikoa esteka honetan aurkituko dugu.

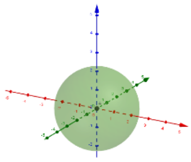
2. JARDUERA

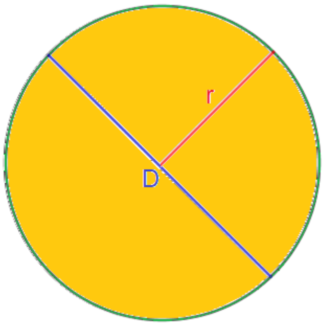


Jarduera honen helburua da elur-maluta baten antzerako egitura eraikitzea. Horretarako, 15 x 15 cm-ko karratu batetik abiatuko gara oinarrizko modulua egiteko, eta modulu hori sei aldiz errepikatu beharko dugu. Kasu honetan, papera leku jakin batzuetatik moztuko dugu, eta sortutako paper-zerrendak kolarekin itsatsiko ditugu (ikusi bideoak). Orain identifikatu simetria-ardatzak.

4.4. ZIRKUNFERENTZIA

Zirkunferentziaren ezaugarriak





r = erradioa
D = diametroa $= 2r$
P = perimetroa
A = azalera

$$\pi = \frac{P}{D}$$

$$P = 2\pi \cdot r$$

$$A = \pi \cdot r^2$$

Irudi bidimentsionalen artean, zirkunferentzia da formarik eraginkorrena; naturan errazagoa da forma biribilak sortzea karratuak baino. Izan ere, zirkuluarekin azalera maximoa lor daiteke perimetro minimoa erabiliz. Gainera, zirkuluari hirugarren dimentsioa gehitzen bazaio, esfera edo zilindroa lortuko genuke.

Zirkunferentzia bat eraikitzeko, konturatu gabe, *pi* zenbakia erabiltzen dugu: perimetroaren eta diametroaren arteko erlazioa (perimetroa / diametroa = π).

Beraz, zirkunferentzia bat agertzen den edozein lekutan *pi* zenbakia ere inplizituki hor dago; ezinbesteko zenbakia da geometrian, trigonometrian, fisikan, astronomian, teknologian, eta baita ekonomian ere.

Greziarrek *π* zenbaki irrazional gisa sailkatu zuten; itxuraz logikarik gabe, infinitu zifra hamartar baititu, biren erro karratuak bezala.

Gaur egun *π* zenbakiaren 31 bilioi digitu ezagutzen dira, eta martxoaren 14an *pi* zenbakiaren eguna ospatzen da, datak zenbakiarekin bat egiten baitu: 3/14.

Gezurra badirudi ere, gaur egungo teknologia modernoek behar den moduan funtziona dezaten, oso garrantzitsua da *pi* zenbakia doitasunez kalkulatzea; adibidez, *GPS*a erabiltzeko.

π

3,1415926535897932384626433...

Irudiaren gainean klikatuz gero, *pi* zenbakiaren musika entzungo dugu. Kontuan hartu *pi* zenbakiak infinitu zifra hamartar dituela; beraz, sinfonia hori bukaezina da.

1. JARDUERA: π zenbakiaren balio enpirikoa

Arestian aipatu dugun modura, zirkunferentzian inplizituki egoten da π zenbakia. Erraza da hori esperimentalki egiaztatzea; horretarako, material hau beharko dugu:

- azal handi bat (kartoia edo papera) zirkunferentzia irudikatzeko
- kordel bat
- txintxeta bat
- errotuladore bat
- zinta metrikoa

Materiala eskuratutakoan, lehenik eta behin, kordela errotuladoreari lotuko diogu, eta txintxetarekin paperean zirkunferentziaren zentroa markatuko dugu. Gutxi gorabehera, erradioa 30 cm-koa izango da; zehaztasun handia ez da beharrezkoa, gero zinta metrikoarekin luzerak neurtuko baitira. Beraz, txintxeta zentroan jarrita eta errotuladorea kordelaren beste muturrean lotuta, zirkunferentzia irudikatuko eta erradioaren balioa idatziko dugu.

Ondoren, kordela zirkunferentziaren perimetroaren gainean kokatuko dugu, eta, jarraian, horren luzera zinta metrikoarekin neurtuko dugu. Beraz, perimetroaren eta erradioaren balioen arteko zatiketa eginez, π zenbakiarekiko balio oso hurbila lortuko dugu.

$$\pi = \frac{perimetroa}{diametroa}$$

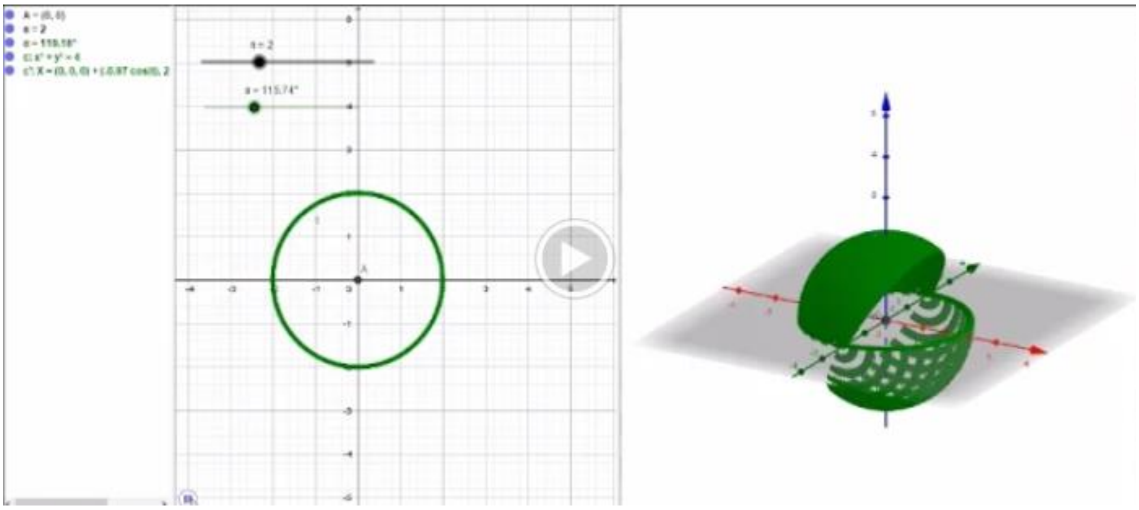
Bada, proportzio hori konstante unibertsala denez, berezia da**!**

K.a. 235. urtean Eratostenes astronomo, geografo eta matematikari greziarrak lurraren diametroa kalkulatu zuen, eta errorea soilik, % 0,5-ekoa izan zen. Horretarako, lurraren perimetroa eguzkiaren izpien laguntzaz kalkulatu zuen (ikusi bideo hau). Kalkuluak egiteko π zenbakia erabiliko ote zuen?

PLANOTIK ESPAZIORA: ESFERA

2. JARDUERA: zirkunferentzia baten biraketak sortutako esfera

Planoko zirkunferentzia birarazten badugu, esfera nola agertzen den ikusiko dugu. Hona hemen sortze-prozesua, Geogebra programarekin egindako bideoan.



3. JARDUERA: talde-lana

Sonobe moduluarekin esfera eraiki daiteke; zenbat eta modulu gehiago egin, orduan eta gainazal handiagoa sortuko da, eta esfera baten antz handiagoa izango du.

Oraingoan, sei koloretako 120 Sonobe modulu beharko ditugu, eta kolore bakoitzeko 20 modulu. Irudiko egitura, 10 moduluz osatua, 12 bider eraikiko dugu. Hurrengo pausoa egitura guztiak mihiztatzea izango da, eta, hala, esfera egituratu egingo da (ikusi bideo hau).

4. JARDUERA: sei paperezko zerrendarekin esfera eraiki

Argi dago, esfera lortzeko, paper laua punturen batetik 360º-an biratu beharko dela. Bideo honetan erakusten da nola muntatzen den esfera bat 1,5 x 21 cm-ko sei paper-zerrendarekin. Esferaren azalera osoa ez da betetzen, eta geratzen diren hutsuneak pentagono erregularrak izango dira.

Galdera:

- Paperezko zerrendak itsatsi eta gero, 20 cm-ko zirkunferentziak sortuko dira. Neurri hori perimetroa baldin bada, zer neurrikoa da sortutako esferaren erradioa?

BIBLIOGRAFIA ETA WEBGRAFIA

Bibliografia

GARRIDO, María Belén: *ORISANGAKUS. DESAFÍOS MATEMÁTICOS CON PAPIROFLEXIA*, Real Sociedad Matemática Española eta ediciones SM, 2015.

Webgrafia

- *LOS CONCEPTOS DETRÁS DE INFINITIVE PATTERNS*, Cristobal Vila https://naukas.com/2019/10/06/los-conceptos-detras-de-infinite-patterns/ Naukas 2019-ko urriaren 6a. **(kontsulta-data: 2019-11-01)**

- *TOLESTUREN MATEMATIKA ETA ARTEA.* Oihane Lakar https://zientzia.eus/artikuluak/tolesturen-matematika-eta-artea/ Elhuyar Zientzia 2014/07/01. **(kontsulta-data: 2018-06-05)**

- *CUADRATURAS DE POLÍGONOS REGULARES*, Grupo Alquereque http://www.grupoalquerque.es/ferias/2004/p_regular.html II Feria de la Ciencia. Sevilla, 2004 **(kontsulta-data: 2018-06-05)**

- *MARC KIRSCHENBAUM* https://en.wikipedia.org/wiki/Marc_Kirschenbaum **(kontsulta-data: 2019-06-05)**

- *CONSTRUCCIÓN CON PAPIROFLEXIA* https://www.edu.xunta.es/espazoAbalar/sites/espazoAbalar/files/datos/1364214841/contido/construccin_con_papiroflexia1.html **(kontsulta-data: 2019-12-05)**

- *CUADRATURAS DE POLIGONOS REGULARES*, Grupo Alquerque http://www.grupoalquerque.es/ferias/2004/p_regular.html **(kontsulta-data: 2019-11-05)**

- *DIVIDIR EN PARTES IGUALES,* Grupo Alquerque http://www.grupoalquerque.es/ferias/2004/p_regular.html XVI Feria de la Ciencia. Sevilla, 2018 **(kontsulta-data: 2019-07-06)**

- *¿POR QUÉ UNA HOJA DE PAPEL ES DE TAMAÑO DIN A4?* Derivando https://www.youtube.com/watch?v=G1Zkiytd8vE **(kontsulta-data: 2019-07-15)**

- *LA VESICA PISCIS*, Jaime Caravaca

http://la-vesica-piscis.blogspot.com/ **(kontsulta-data: 2019-07-06)**

- *HOW TO MAKE ORIGAMI BUCKYBALLS FROM PHIZZ UNITS,* BARBABELLAATJE https://www.youtube.com/watch?v=e-BZGxwycUQ **(kontsulta-data: 2018-12-09)**

- *BALOIAREN FORMA*, Teknopolis

  https://www.facebook.com/Teknopolis/videos/baloiaren-forma/10150708650646395/ Teknopolis, 2012 **(kontsulta-data: 2018-12-06)**

- *LA CALZADA DEL GIGANTE* https://www.ireland.com/es-es/articles/regions/giant-causeway/giants-causeway/ Irlanda **(kontsulta-data: 2019-11-11)**

- *OJO COMPUESTO DE KRILL DE LA ANTÁRTIDA VISTO EN UN MICROSCOPIO ELECTRÓNICO.* https://es.wikipedia.org/wiki/Ojo_compuesto#/media/Archivo:Krilleyekils.jpg **(kontsulta-data: 2019-11-11)**

- *MORNING GLORY Y EL PENTÁGONO*, Mateolivares http://matemolivares.blogia.com/2014/110401-morning-glory-y-el-pentagono..php **(kontsulta-data: 2019-11-11)**

- *SNOWTIME III*, Ivanov Slava.. https://vimeo.com/190581025. **(kontsulta-data: 2018-01-17)**

- *WHY NATURE LOVES HEXAGONS*, It's Okay To Be Smart https://www.youtube.com/watch?v=Pypd_yKGYpA&feature=emb_logo **(kontsulta-data: 2018-01-17)**

- *EL HEXÁGONO DE SATURNO* https://www.youtube.com/watch?v=KKWRwISNQ5o Exoplanetas, Noticias Ciencia y Tecnología **(kontsulta-data: 2019-02-21)**

- *EL EXPERIMENTO DEL ARROZ: LOS SENTIMIENTOS EN LOS OBJETOS QUE NOS RODEAN,* Semana Sostenible https://sostenibilidad.semana.com/tendencias/articulo/el-experimento-del-arroz-masaru-emoto/30480 **(kontsulta-data: 2019-03-20)**

- *ARTE-LANAK PAPERAREKIN*, Peter Dahmen
  https://peterdahmen.de/project/iggesund-schneeflocke/ **(kontsulta-data: 2019-12-01)**

- *LETTERS FROM THE SKY,* Peter Dahmen
  https://peterdahmen.de/wp-content/uploads/2016/12/schneeflocken-berechnungen.pdf
  (kontsulta-data: 2019-12-04)

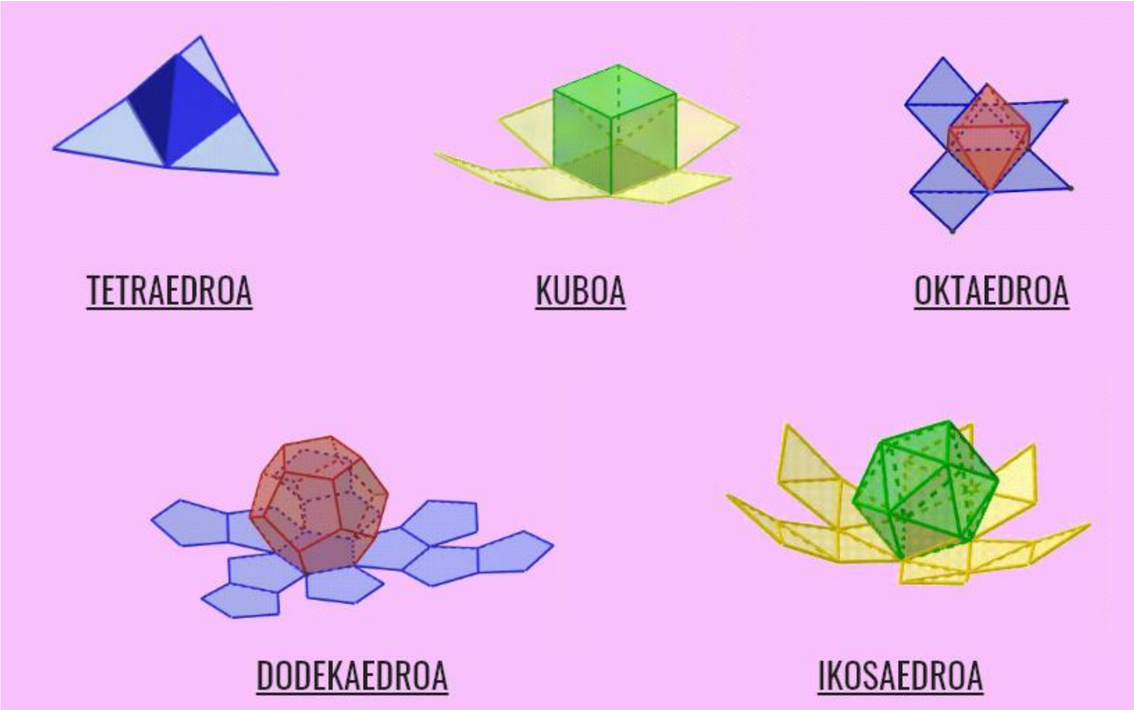
- *SONG FROM* π
  https://www.youtube.com/watch?v=wM-x3pUcdeo **(kontsulta-data: 2019-12-05)**

- *CÓMO SE MIDIÓ POR PRIMERA VEZ LA TIERRA,* Tareasplus
  https://www.youtube.com/watch?v=UeIQnjOEGUY **(kontsulta-data: 2019-12-04)**

- *GRAN ESFERA DE 120 UNIDADES. ORIGAMI*
  https://www.youtube.com/watch?v=-dTj6olbzIw **(kontsulta-data: 2019-12-04)**

- *BALL - PAPER WEAVING,* SimplePaperMade
  https://www.youtube.com/watch?v=cJfp1TwKuyk **(kontsulta-data: 2019-12-04)**

5. SOLIDO PLATONIKOAK



Solido platonikoek izen hori dute, Platonek (K.a. 427-347) lehenengo aldiz aztertu zituelako. Solido platonikoak –solido erregularrak, erregular ganbilak edo perfektuak– bost poliedro hauek dira: tetraedroa, hexaedro edo kuboa, oktaedro edo bipiramide karratua, dodekaedroa eta ikosaedroa.

Bideo honetan azaltzen da zergatik dagoen bost poliedro irregular solik (ikusi tarte hau: 0 min 0 s–7 min 25 s).

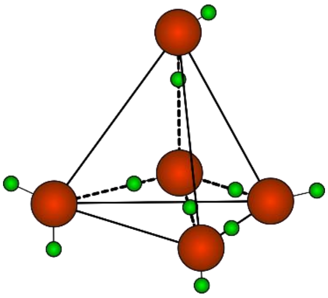
Filosofo eta zientzialari batzuek esaten dute solido platonikoen esentzian barrentzeak erraztu egiten duela errealitatearen egitura ulertzea. Neolitotik gaur egunera arte, solido platonikoek zibilizazio guztiak liluratu dituzte, haien ezaugarri estetiko, sinboliko, mistiko eta kosmikoengatik.

Garai guztietan, poliedro erregular hauek edertasun idealaren sinbolo izan dira. Horregatik, Errenazimentuan hainbat artistak beren lanetan erabili zituzten, hala nola Leonardo Da Vincik, Durerok, Piero della Francescak eta abarrek.

Aro Modernoan, solido platonikoei esker goi-mailako matematika-problemak ekuazio aljebraikoekin eta kristalografiarekin erlazionatu izan dira. Baina, ez hori bakarrik, beren edertasunagatik eta misterioagatik inspirazio-iturri bukaezina izan dira artista eta diseinatzaile askorentzat; besteak beste, Gaudi, Escher eta Dali aipa genitzake. Horiek ere, gure arbasoek bezala, solido platonikoen geometriari funtzio estetiko, zientifiko, mistiko eta teologikoak antzematen zizkioten.

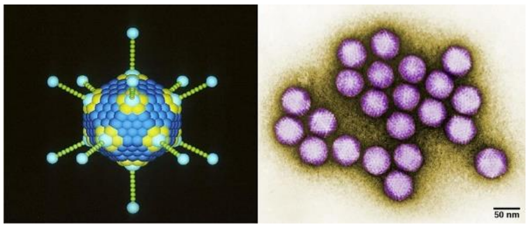
Materia, bestalde, solido platonikoen formaren arabera solidotzen eta antolatzen da. Horren ondorioak sakonak dira, materiaren nukleo atomikoaren egituran ageri baitira; gainera, neutroiak eta protoiak patroi geometriko horien arabera kokatzen dira, kohesioa eta indar nuklearrak mantentzeko.

Gaur egun, mikroskopio elektronikoei esker, sustantzia batzuen egiturak fotografiatu dira. Esaterako, irudian ikusten dugu kloruro sodikoaren eredu geometrikoa kuboarena dela.



Karbonoaren kasuan, haren molekulek bizitza sortzen dute, eta tetraedroaren barne-egitura daukate. Lau lotura kimiko horiekin eratzen diren molekula erraldoiek, esaterako DNAk eta proteinek, ezinbesteko informazio genetikoa transmititzen dute izaki bizidun guztien garapenerako eta funtzionamendurako.

Azkenik, birus batzuek ikosaedroaren egitura hartzen dute. Horri esker, kapside handiena eraikitzen dute, barruan informazio minimoa sartuta.



Bost solido platoniko edo erregularren ezaugarriak honako hauek dira: aurpegi guztiak berdinak dira –triangeluan, karratuan eta pentagonoan bezala–, edozein erpinen inguruan aurpegi kopuru bera elkartzen da, eta esfera batean zirkunskribatu daitezke. Gainera, orain arte aipatu ditugun zenbaki irrazionalak –biren erroa, hiruren erroa eta urrezko zenbakia– integratuta daude haien proportzioetan.

Eulerren legearen bitartez, aurpegi, ertz eta erpin kopuruak erlazionatu egiten dira formula hau erabilita:

$$A + E = Er + 2$$

A = aurpegi kopurua

E = erpin kopurua

Er = ertz kopurua

1. JARDUERA

Bost solido platonikoak papiroflexiaren bitartez eraikiko ditugu. Jarraian, aurpegiak, erpinak eta ertzak zenbatuko ditugu, eta Eulerren legea betetzen den egiaztatuko dugu. Horretarako, taula honetan idatziko ditugu datuak.

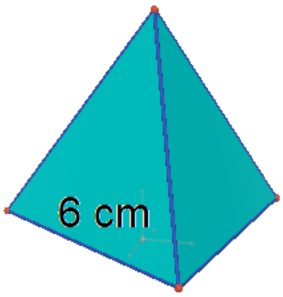
Irudia	Poliedroaren izena	Aurpegiaren poligonoa	Aurpegi kopurua	Erpin kopurua	Ertz kopurua

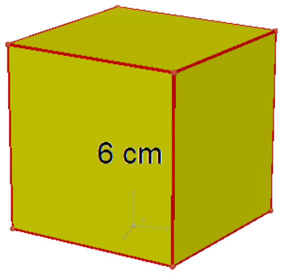
2. IKERKETA-JARDUERA

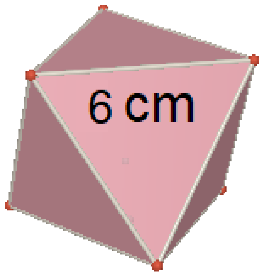
Irudietako poliedro erregularren azalera eta bolumena kalkulatuko ditugu. Horretarako, poliedro bakoitzaren fitxa deskribatzailea egingo dugu. Klikatu hemen txantiloia lortzeko. Ikerketa-lana izango da eta ezaugarri hauek guztiek agertu beharko dute:

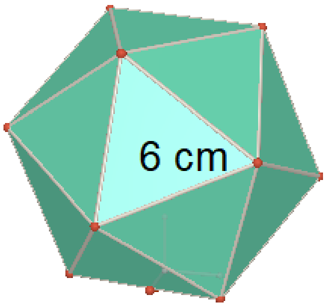
- aurpegi bakoitzaren poligonoa
- aurpegi kopurua
- ertz kopurua
- alde kopurua
- erpin bakoitzean elkartzen den aurpegi kopurua
- aurpegiek osatzen duten angeluaren neurria
- azaleraren formula eta kalkuluak
- bolumenaren formula eta kalkuluak
- garapen laua

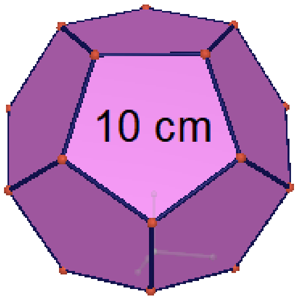
Irudi bakoitzean aldearen balioa agertzen zaigu.







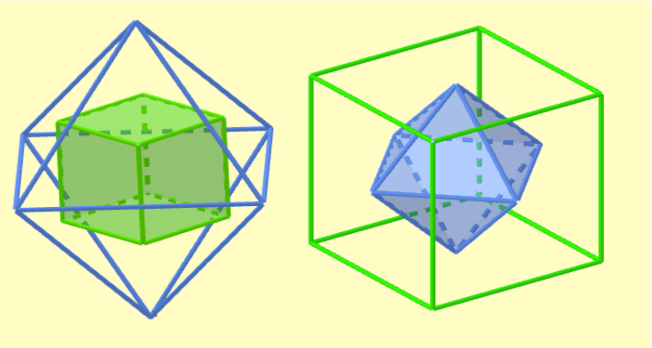




POLIEDROAREN IZENA ETA IRUDIA

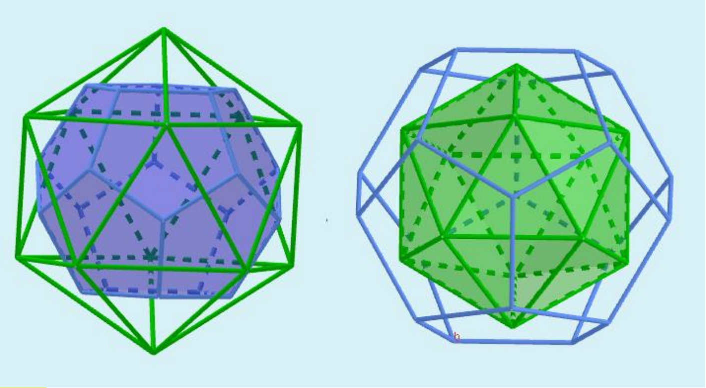
- aurpegiaren poligonoa =
- aurpegi kopurua =
- ertz kopurua =
- alde kopurua =
- erpin bakoitzean elkartzen den aurpegi kopurua =
- aurpegiek osatzen duten angeluaren neurria =
- azaleraren formula eta kalkuluak =
- bolumenaren formula eta kalkuluak =
- garapen lauaren irudia (nahi izanez gero, atal hau Geogebra programaren bidez)

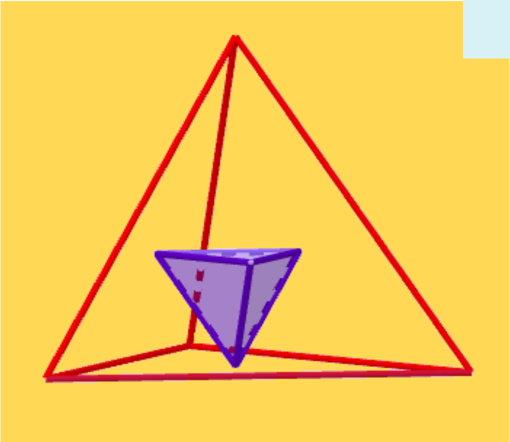
5.1. SOLIDO PLATONIKOEN DUALTASUNA



Solido platonikoen berezitasun bat dualtasuna da. Solido batzuk beste batzuen barruan eraiki daitezke, fraktalak izango balira bezala; prozesu hori infinitua da haien tamaina txikituta zein handituta ere. Adibidez, hexaedro baten aurpegien erdiko puntuak lotzen baditugu, oktaedroa lortuko dugu; era berean, oktaedroaren aldeen erdiko puntuak lotuz gero, kuboa eraikiko dugu. Bi elementu horiei solido dualak esaten zaie.

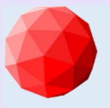
Egoera hori beste solido platonikoekin ere errepikatzen da, adibidez, dodekaedroarekin eta ikosaedroarekin. Tetraedroa, aldiz, bere buruarekiko bakarrik da duala.





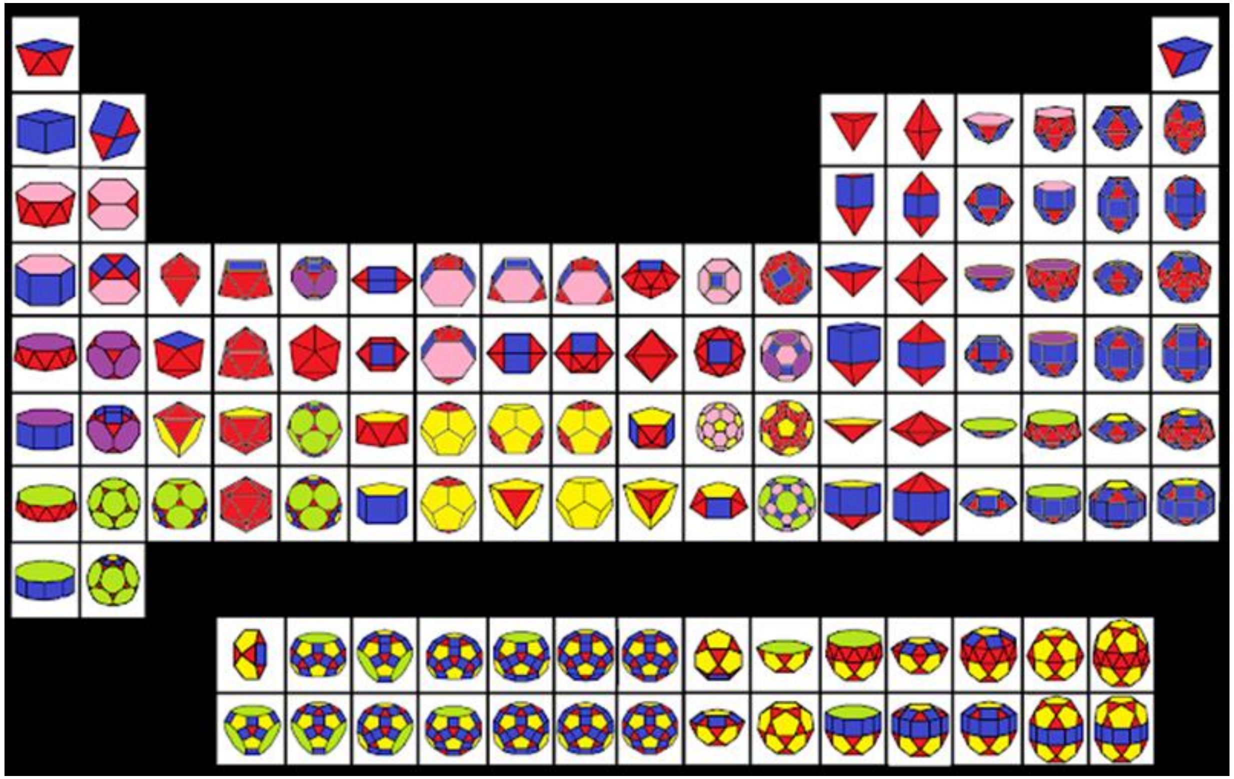
3. SAKONTZEKO JARDUERA:

Azaldu dugun dualtasun-prozesua berezia da. Baina, zergatik? Segur aski, prozesu horretan arrazoi matematikoren bat egongo da. Zergatia topatzeko, poliedro bakoitzaren aurpegi (A), erpin (E) eta ertz (Er) kopurua aztertu behar dugu, eta ondorio batera heldu. Horretarako, bete honako taula hau, eta saiatu dualtasun-prozesua azaltzen. Jarraian, horren inguruko bateratze-lana egingo dugu.

IRUDIA	POLIEDROA	A	E	Er
	**HEXAEDROA**			
	**OKTAEDROA**			
	**DODEKAEDROA**			
	**IKOSAEDROA**			
	**TETRAEDROA**			

4. JARDUERA:

Esteka honetan elementu kimikoen taula poliedrikoa daukagu. Egia esan, taula hau berezia da, elementu kimiko bakoitzaren barneko egitura geometrikoaren berri ematen baitu. Zein dira poliedro erregularren barne-egitura daukaten elementu kimikoak? Erregularrak ez direnei buruz, zer esan dezakegu? Nola eratzen dira? Erantzun galdera horiei guztiei, egin hausnarketa eta aurkeztu gero ondorioak idatziz. Jarraian, bateratze-lana egingo dugu.



La tabla periódica de los poliedros. José Lorenzo López, 2016

5.2. TETRAEDROA

Tetraedro hitzak, grekeraz, lau aurpegi esan nahi du. Haren aurpegi guztiak triangelu aldekideak dira, eta erpin bakoitzean hiru triangelu elkartzen dira; ondorioz, poliedro erregularra da. Aurpegietako triangeluak desberdinak izango balira, piramide triangeluarra izango litzateke.

Poliedro honetan Eulerren teorema (A+E = Er+2) betetzen da; izan ere, 4 aurpegi, 4 erpin eta 6 ertz ditu (4+4 = 6+2). Bestalde, tetraedroaren bolumena oinarri eta altuera bereko prismaren herena da; beraz, azalera lortzeko aurpegi baten triangelu aldekidea bider lau egin behar da.

1.JARDUERA

TETRAEDRO ERAIKI

Bi modulu triangeluar simetrikoren bidez eraiki daiteke tetraedroa. Lehenengo bideoan modulu triangeluarra nola eraikitzen den ikusiko dugu, eta bigarrenean, berriz, horren simetrikoa.

Eta hirugarren honetan, azkenik, tetraedroa nola eraikitzen den ikusiko dugu.

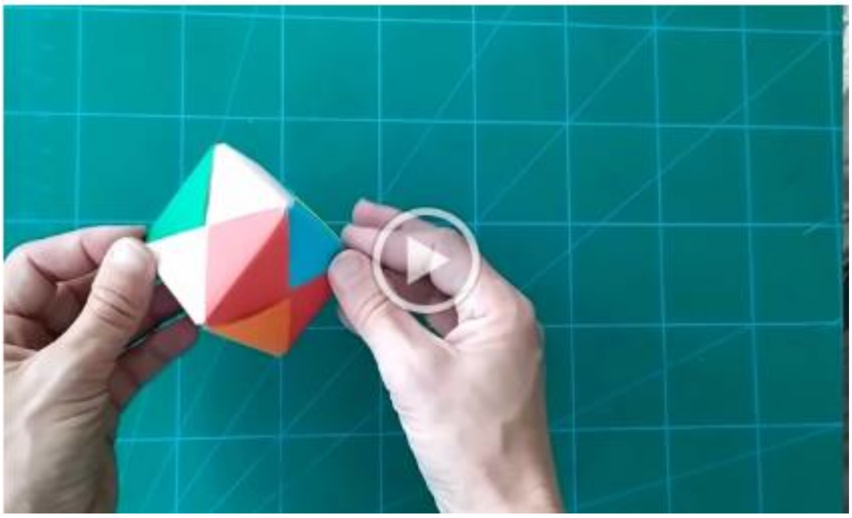
- Tetraedroa sortutakoan, kalkulatu haren azalera eta bolumena.

5.3. KUBOA

Badakigu kuboa gorputz erregular ganbila dela. Asko dira kuboa papiroflexiaren bidez eraikitzeko dauden metodoak; halere, hemen gutxi batzuk baino ez ditugu ikusiko.

1. KUBOA ERAIKI SONOBE MODULUAREKIN

Bideo honetan kuboa osatzen da, 6 Sonobe moduluren bitartez. Jarduera hau egin baino lehen, pentsatu zenbat kolore erabili behar ditugun eta nola eraiki behar dugun kuboa, haren erpin bakoitzean hiru kolore desberdin ager daitezen.



Kuboa osatu ondoren:

- Kalkulatu haren azalera eta bolumena.

- Neurtu hasierako karratu baten aldea.

- Neurtu kuboaren ertza, eta azaldu zer proportzio dagoen karratuko aldearen eta hexaedroko ertzaren artean.

2. JARDUERA

KUBO INFINITUA

Egin berri dugun kuboaren gisako 8 kuborekin kubo infinitua lor daiteke, etengabe ireki eta itxi egiten dena. Hori bai, kubo bat beste batekin uztartzeko, beste 16 modulu tolestu behar ditugu. Gainera, binaka elkartzen diren kuboek simetrikoak (ispiluko irudiak) izan behar dute; hau da, ongi pentsatu behar dugu papertxoen koloreak nola kokatu.

Horrenbestez, kubo infinitua eraikitzeko honako hauek behar ditugu: alde batetik, tamaina bereko 64 karratu eta, bestetik, talde-lanean aritzeko borondatea (ikusi bideoa).

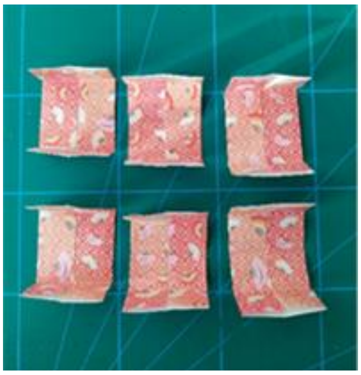
3. PAUL JACKSON-EN KUBOA

Kubo honen diseinua 1837. urte ingurukoa da, eta karten bidez osatu zen; bederen, hori da David Mitchell-ek kontatzen duena *Origami Heaven* webgunean. Bestalde, haren arabera, kuboa oso erraz egin daiteke. Hona hemen oinarrizko moduluaren diagramak eta eman beharreko pausoak iruditan.

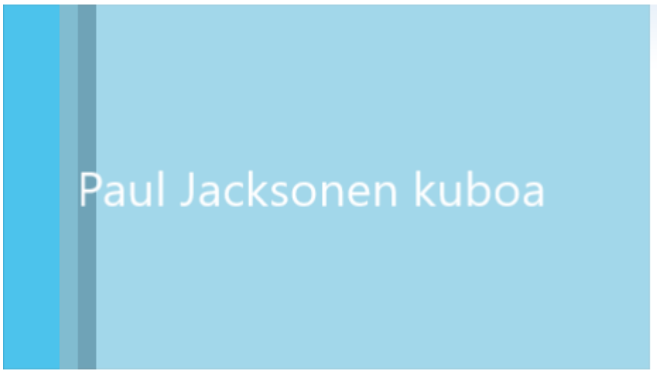






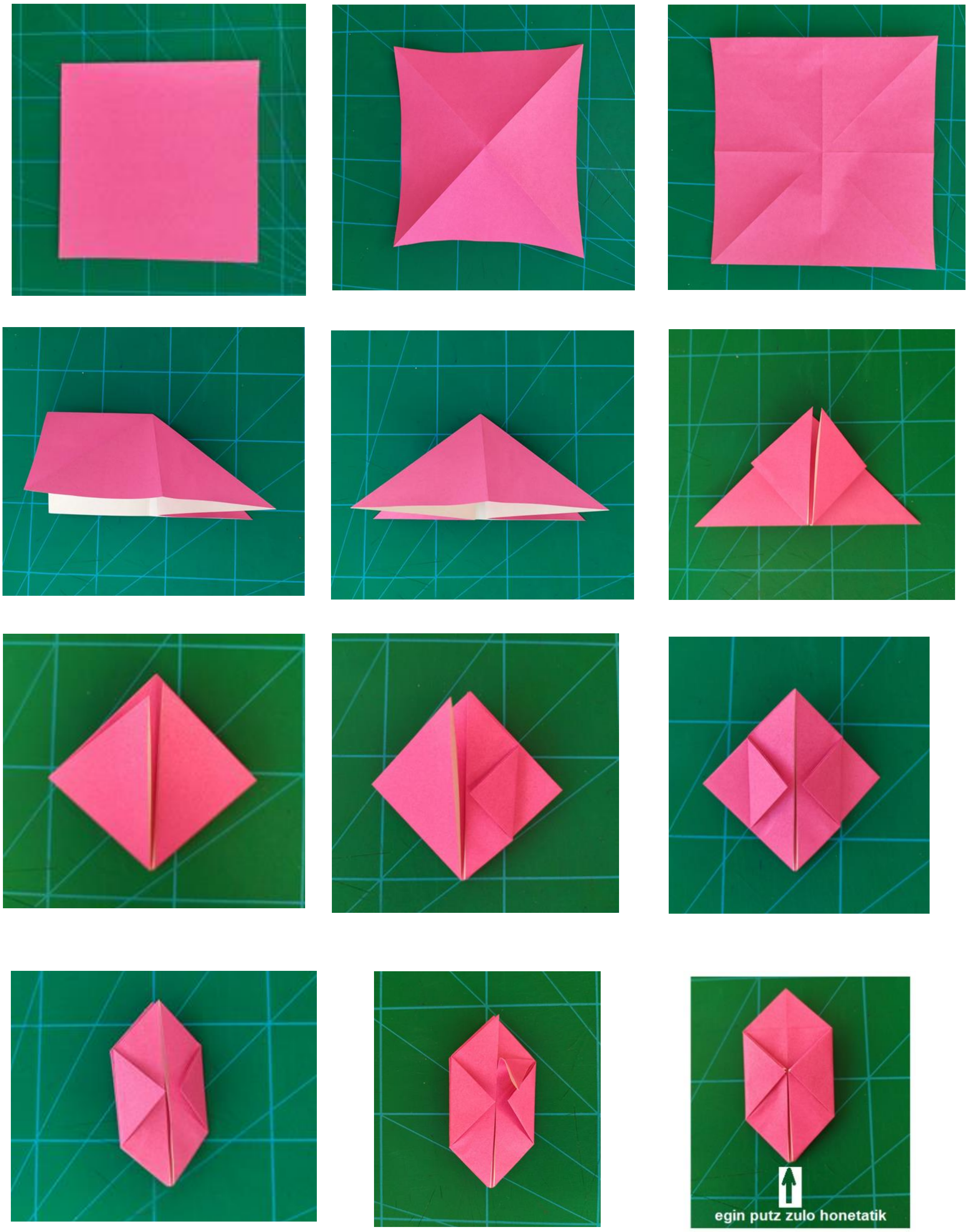
Piezak muntatzeko argibideak bideo honetan dauzkagu:

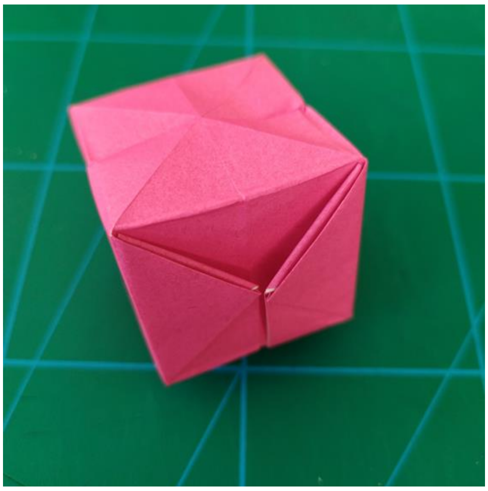


00:02,77/01:19,17

3. **JARDUERA: EGIN PUTZ**

Bideo honetan azaltzen denez, paperezko karratu bakar batetik abiatuta kubo bat egingo dugu, azkenengo pausoan putz eginez. Irudi hauetan ikusiko dugu prozesua. Jarraian, kalkulatu kuboaren azalera eta bolumena.





5.4. OKTAEDROA

Oktaedroa zortzi aurpegi dituen poliedroa da. Aurpegi guztiak triangelu aldekideak badira, oktaedroa ganbila eta erregularra izango da, baita solido platonikoetako bat ere. Erpin batean lau triangelu aldekide elkartuz gero, piramide karratua sortzen da, eta horren oinarri karratuan neurri bereko beste piramide karratu bat itsatsiz gero, oktaedroa lortzen da. Hain zuzen, oktaedroari horregatik deritzo bipiramide karratua.

Poliedro honetan Eulerren teorema (A + E = Er + 2) betetzen da; izan ere, 8 aurpegi, 6 erpin eta 12 ertz ditu (8 + 6 = 12 + 2).

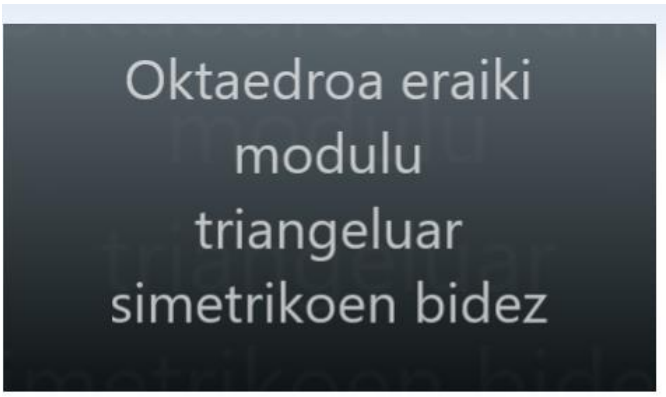
Oktaedroaren azalera 8 bider aurpegi baten azalera da; bestalde, bolumena kalkulatzeko formula hau erabiltzen da:

$$B = \frac{\sqrt{2}}{3} Er^3$$

Formula horretan biren erro karratuak parte hartzen duela ikusten dugu. Kasualitatea ote da?

1. JARDUERA

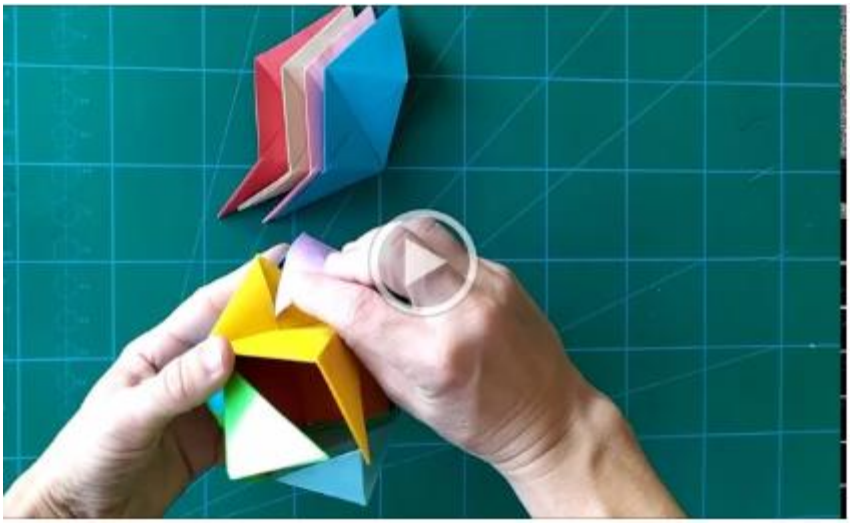
Oktaedroa eraikitzeko lau modulu triangeluar erabiliko ditugu; kasu honetan, modulu triangeluarrak bikote simetrikoz osatuta egongo dira. Ikus dezagun nola muntatzen den oktaedroa bideo honetan:



00:06,17/01:24,19

2. JARDUERA

Bideo honetan, 12 Sonobe modulurekin, oktaedro izartua nola eraikitzen den ikusiko dugu.

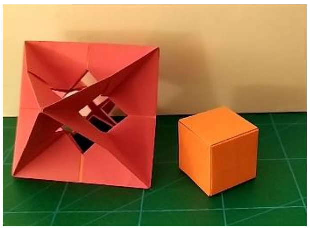


Ariketak:

- Neurtu triangelu baten aldea eta altuera, eta kalkulatu oktaedro izartu horren azalera.
- Zenbat erpin eta aurpegi ditu? Betetzen da Eulerren legea?

3. JARDUERA

Sei giroskopio modulurekin oktaedroa eraiki daiteke. Irudian ikusten da oktaedroaren barruan kubo bat sartzeko lekua dagoela, eta badakigu kuboa oktaedroaren poliedro duala dela.



Zenbateko luzera izan behar du kubo horren aldeak oktaedroaren barruan sartzeko? Orain, luzera horretako aldea duen karratua eraikiko dugu, eta, jarraian, oktaedroaren modulu bat desmuntatuko dugu eraikitako kuboa barruan sartu ahal izateko (ikusi bideoa).

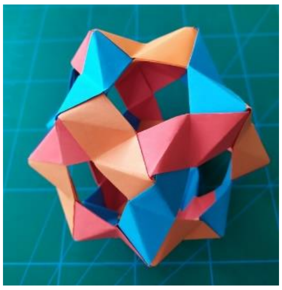
5.5. DODEKAEDROA

Dodekaedroa hamabi aurpegi dituen poliedroa da; gainera, aurpegiak pentagono erregular berdinak badira, dodekaedro ganbila izango da eta, beraz, solido platonikoen sailekoa: erpin bakoitzean hiru pentagono erregular elkartuko dira, eta, poliedro erregular guztietan bezala, Eulerren teorema (A+E = Er+2) beteko da. Izan ere, 12 aurpegi, 20 erpin eta 30 ertz ditu, hau da, 12 + 20 = 30 + 2.

Dodekaedro erregularraren azalera 12 bider aurpegi pentagonal baten azalera da. Bestalde, bolumena formula honen bidez kalkulatzen da:

$$B = \frac{1}{4}(15 + 7\sqrt{5}) \cdot Er^3$$

1. JARDUERA



Egitura dodekaedrikoa eraikitzeko 30 PhIZZ moduluz baliatuko gara. Gainera, hiru kolore erabiliko ditugu; beraz, kolore bakoitzeko 10 modulu tolestuko ditugu. Kontuan hartu erpin bakoitzean hiru modulu mihiztatzen direla (ikusi bideoa).

5.6. IKOSAEDROA

Solido platonikoetako ikosaedroak 20 triangelu aldekide ditu aurpegietan, eta poliedro gabila eta erregularra da. Haren erpin bakoitzean bost triangelu aldekide elkartzen dira, eta 300º-ko angelua osatzen da horrela. Ondorioz, bolumenezko gorputz bat sor daiteke. Poliedro honetan, Eulerren teorema (A + E = Er + 2) betetzen da; izan ere, 20 aurpegi, 12 erpin eta 30 ertz ditu (20 + 12 = 30 + 2).

Ikosaedro erregularraren azalera hogei bider aurpegi pentagonal baten azalera da; bolumena formula honen bidez kalkulatzen da:

$$B = \frac{5}{12}\left(3 + \sqrt{5}\right) \cdot Er^{3}$$

1. JARDUERA

Oraingo honetan, binakako taldetan, laborategira joango gara ikosaedroaren bolumena enpirikoki kalkulatzera. Horretarako, mintegiko plastikozko ikosaedroak hartu eta hauspeakin-ontzi handi baten barruan sartuko ditugu. Jarraian, litro bat ur botako dugu, ikosaedroa erabat estalita geratu arte. Hauspeakin-ontziaren eskalak ura noraino heltzen den adieraziko digu; beraz, guk ontziak zenbat cm^3 ur biltzen duen idatziko dugu.

Galdera:

- Nola kalkula daiteke ikosaedroaren bolumena? Azaldu prozesua.
- Ikosaedroaren ertza neurtuko dugu eta, gero, horren bolumen teorikoa kalkulatuko dugu, arestian emandako formularen bidez. Lortutako bolumen enpirikoa eta teorikoa bat datoz? Arrazoitu erantzuna.

2. **JARDUERA: talde-lana**

Ikosaedro izartua erraz eraikitzeko, beharrezkoak dira 30 Sonobe modulu eta ikasle guztien parte-hartzea. Bost koloretako moduluak erabiliko ditugu; beraz, kolore bakoitzeko 6 modulu behar dira. Ikusi muntaketa bideo honetan:

3. **JARDUERA: talde-lana**

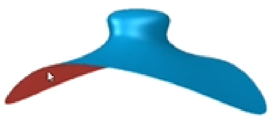
30 Edge modulu mihiztatuz, ikosaedro bat eraiki daiteke. Bernabe Martinen webgunean moduluaren diagramak ageri dira, eta bideo honetan ikusiko dugu nola eraiki modulua eta nola muntatu ikosaedroa. Gero, bukatutakoan, kalkulatu ikosaedroaren azalera eta bolumena.

6. AZALERAK SORTZEA FORMULA ALJEBRAIKOEN BIDEZ

Programa informatiko batzuek formula matematiko bati dagokion hiru dimentsioko forma bistaratzen dute; horietako bat SURFER programa da, eta, haren bidez, formularen eta formaren arteko lotura estua esperimentatu daiteke; hau da, espazioko azalera bikainak sor daitezke, ekuazio sinpleak programan sartuz.

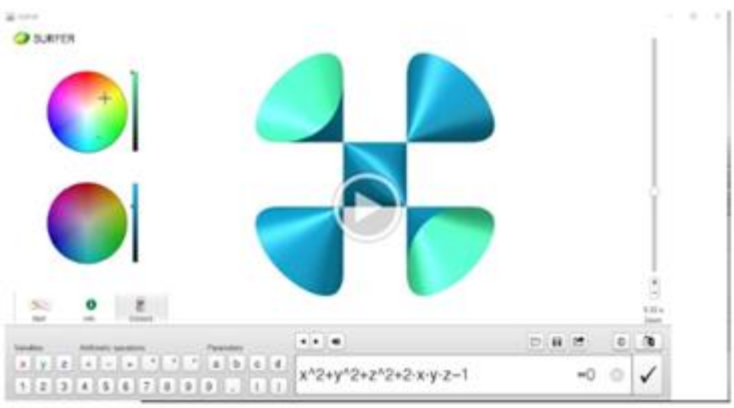
Bada, 2011. urtean matematikarekin esperimentatzeko aukera izan zuten Real Sociedad Matemática Española elkarteak (RSME) Euskal Herriko Unibertsitatearekin (UPV/EHU) batera antolatutako "Imaginary. Begirada matematiko bat" izeneko erakusketara hurbildu zirenek, han instalaturiko arbel digitalen bidez. Gisa horretako jardunaldiak mundu osoan zehar antolatu dira, "Imaginary" plataforma interaktiboa 2008. urtean sortu zenetik.

1. JARDUERA



Azpiko bideoan, honako hau ikus dezakegu: hasierako formula baten parametroak aldatuz, bukaerako forma kapela batena izango da.

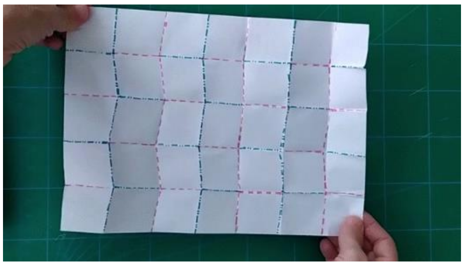
Hori lortzeko, ez dugu matematikaz asko jakin behar. Aski da formularen parametroekin jolastea; haien balioak aldatuta forma ere itxuraldatuko da. Esaterako, hau da txano horren azaleraren formula: $3x^2+6y^3+z^2+6xyz-1=0$



Orain gure txanda da. SURFER programa librea denez, gelan daukagun ordenagailuan instalatuko dugu (klikatu hemen). Ondoren, formekin esperimentatzen hasiko gara; eta ez hori bakarrik, norberak sorturiko irudia kolorez inprimatuko dugu. Gainera, gure lanak jarduera honetarako antolatuko dugun erakusketan aurkeztuko ditugu.

2. JARDUERA

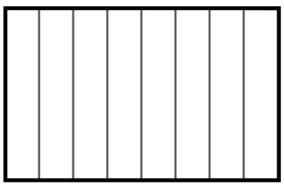
Papiroflexiaren atalean ikusi dugu arte hau aeronautikan ere erabiltzen dela. Gainera, bideo batean ikusi dugu sateliteen hegalak *origami*aren ereduen arabera zabaltzen eta ixten direla. Bada, ildo horretatik, Koryo Miura astrofisikari japoniarrak azalera lau bat (adibidez, orri bat) tolesturen bidez nola trinkotu asmatu zuen. Hark sortutako metodoari Miura-ori (Miura tolestura) deritzo, eta matematikaren eta *origami* zurrunaren arteko erlazioan oinarritzen da. Tolestura horrek teselazio-prozesua sortzen du, paralelogramoen bidez; egitura osoa kolapsatzen eta zabaltzen da horrela.



Esperimenta dezagun paperezko orri batekin; hartara, guk ere sateliteen hegalen prototipoa garatuko dugu. DIN-A4 orri bat hartu eta Miura ereduaren arabera tolestuko dugu. Edozein tamainatako papera erabil dezakegu, baita DIN-A3 tamainakoa ere (hiri bateko informazio- eta turismo-mapa, adibidez).

Miura tolestura eraikitzea

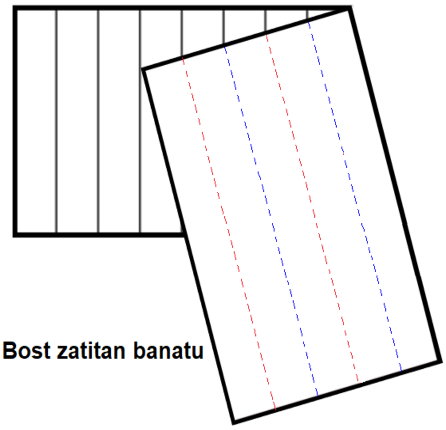
Aurreko irudian ikusi dugun moduan, Miura tolestura lortzeko 5 zatitan banatu behar da orria alderik laburrenean, eta 7 zatitan luzeenean.

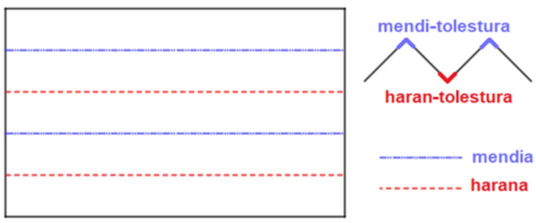


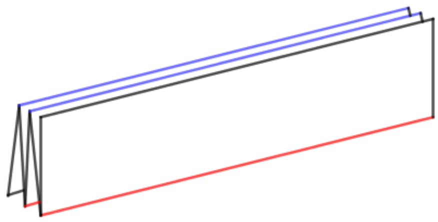
Paperezko erregela

Miura tolesturarekin hasi baino lehen, paperezko erregela bat egingo dugu; horrekin errazagoa izango da distantziak neurtzea, aipatutako zatiak egiteko. Beraz, lehenik, DIN-A4 orri bat erditik tolestuko dugu, eta, gero, erdiaren erditik, zortzi zati berdin lortu arte. Horixe izango da gure erregela.

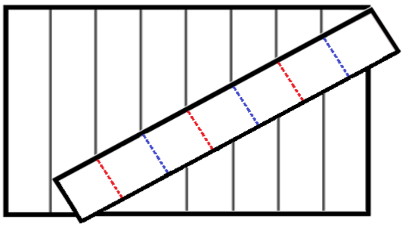
Jarraian, beste orri bat hartu eta bost zatitan banatuko dugu. Horretarako, paperezko erregelaren gainean kokatuko dugu, eskuineko irudian ageri den moduan. Erregelak distantziak markatzen dizkigu, eta badakigu, hortaz, tolesturak non egin behar ditugun. Tolesturak egindakoan, abaniko moduko mendi- eta haran-tolesturak sortuko dira; laukizuzen estua eta luzea agertuko da horrela.







Gisa horretan dagoenean, papera zazpi zati berdinetan tolestuko dugu eta berriro mendiak eta haranak sortuko dira.



Artikulu honetan, Yukata Nishiyama matematikari japoniarrak hurrengo pausoak erakusten dizkigu bere diagrametan. Gainera, bideo honetan eraikitze-prozesua ikusteko aukera ere badaukagu.

Amaitutakoan, lanak erakusketan jarriko ditugu.

BIBLIOGRAFIA ETA WEBGRAFIA

- *PLATON*
  https://eu.wikipedia.org/wiki/Platon **(kontsulta-data: 2019-06-01)**
- *PERFECT SHAPES IN HIGHER DIMENSIONS,* Numberphile

  https://www.youtube.com/watch?v=2s4TqVAbfz4 **(kontsulta-data: 2019-10-05)**
- *BIRUS*

  https://www.wikiwand.com/eu/Birus#/Egitura **(kontsulta-data: 2019-10-25)**
- *LA TABLA PERIÓDICA DE LOS POLIEDROS,* José Lorenzo
  http://joselorlop.blogspot.com/2016/01/745-la-tabla-periodica-de-los-elementos.html **(kontsulta-data: 2019-10-30)**
- *HOW TO MAKE A PAPER INFINITY CUBE!* LHack TV
  https://www.youtube.com/watch?v=MHHlyycX3Ro **(kontsulta-data: 2019-10-30)**
- *ORIGAMI HEAVEN*, David Mitchell
  http://www.origamiheaven.com/businesscardcube.htm **(kontsulta-data: 2019-11-30)**
- *CÓMO HACER UN CUBO DE ORIGAMI*, WikiHow

  https://es.wikihow.com/hacer-un-cubo-de-origami **(kontsulta-data: 2019-10-12)**
- *ZIENTZIA ASTEA. PAPIROFLEXIA MATEMÁTICA,* UPV/EUH

  https://www.youtube.com/watch?v=cFRYQkqYv4A **(kontsulta-data: 2019-09-21)**
- ICOSAEDRO (MÓDULO EDGE) Bernabé Martín
  http://www.bermarez.com/papiro/48_icosaedro_mdulo_edge.html **(kontsulta-data: 2019-09-25)**
- ORIGAMI ICOSAEDRO, Fanytuxtux Chavez
  https://www.youtube.com/watch?v=KFVeEZqJM-E **(kontsulta-data: 2019-12-15)**
- *SURFER PROGRAMA*
  https://imaginary.org/es/program/surfer **(kontsulta-data: 2019-09-01)**
- *IMAGINARY. UNA MIRADA MATEMÁTICA*
  https://imaginary.org/sites/default/files/rsme-imaginary_catalogue_es.pdf **(kontsulta-data: 2018-08-31)**
- RSME-IMAGINARY in Bilbao
  https://imaginary.org/es/event/rsme-imaginary-in-bilbao **(kontsulta-data: 2018-09-11)**
- *IMAGINARY.EVENTS*
  https://imaginary.org/es/events **(kontsulta-data: 2018-11-15)**
- *MIURA FOLDS*
  https://en.wikipedia.org/wiki/Miura_fold **(kontsulta-data: 2018-11-15)**

- *MIURA FOLDING: APPLYING ORIGAMI TO SPACE EXPLORATION*, Yutaka Nishiyama
https://ijpam.eu/contents/2012-79-2/8/8.pdf **(kontsulta-data: 2018-12-16)**

7.SAKONTZEKO MATERIALA

7.1 ARAZO-EGOERAK

7.1.1. Zuhaitzaren enborraren bolumena

Izenburua:	***ZUHAITZAREN ENBORRAREN BOLUMENA***
Arloa/Gaia:	***Matematika***
Maila:	**DBH 2**

Testuingurua

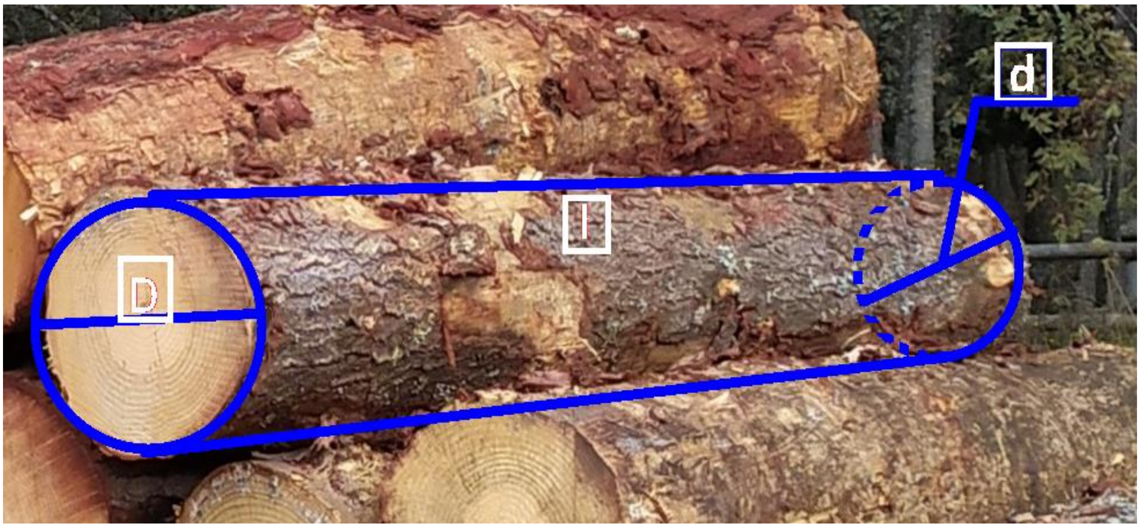
Euskal Autonomia Erkidegoan, basoak nagusi dira. Gure lurraldean, zuhaitzek eremu osoaren % 55 hartzen dute, alegia, 396.962 hektarea (ha). Koniferoak dira gehien landatzen diren espezieak, bereziki, intsinis pinua (% 33). Ez dira gutxi basoek gure ingurumenerako sortzen dituzten onurak: egurra emateaz gain, klima erregulatzen dute, lurra higaduratik babesten dute eta bertako izaki bizidun askoren habitata sortzen dute.

Egurraren industria diru-sarrera handia da nekazarientzat. Alde batetik, egurraren sektorean 20.000 baso-jabe inguru daude, eta, bestetik, alorreko 120 enpresa; eta horiek 5.500 langileri ematen diete lana. Datu horiek ikusita, oso garrantzitsua da egurraren ekoizpena kontrolpean izatea, egurraren industriak luzaroan iraun dezan eta irabaziak maximoak izan daitezen.

Orain gure txanda da; egun batez ingeniariak izango gara eta mendira joango gara neurriak hartzera.

Arazoa

Guk teknikari egiten dugu lan egur-enpresa batean. Mendian gaude, eta zuhaitzen mozketak kontrolatzen ari gara. Gure aurrean 15 enbor ditugu, eta, zinta metrikoa erabilita, enborren neurriak hartu beharko ditugu, gero taula batean jasotzeko. Interesatzen zaizkigun neurriak hauek dira: enborraren diametro maximoa (D), enborraren diametro minimoa (d) eta enborraren luzera (l).



Ondoren, datu guztien batezbestekoak kalkulatuko ditugu, eta, Excel programaren bidez, balio horiekin egur metro kubikoak zenbatetsiko ditugu.

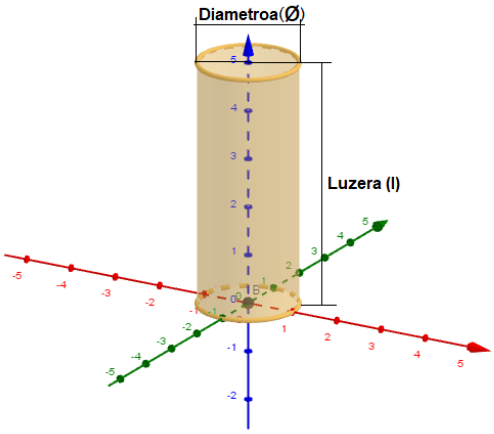
Datuak	D (m)	d (m)	l (m)
1	0,35	0,16	6,2
2	0,27	0,15	5,3
3	0,22	0,17	5
4	0,19	0,15	4,9
5	0,33	0,26	6
6	0,29	0,23	5,9
7	0,25	0,17	5,1
8	0,36	0,27	6,1
9	0,4	0,35	6,5
10	0,18	0,13	4,8
11	0,25	0,19	6
12	0,31	0,24	6,8
13	0,2	0,15	4,5
14	0,38	0,29	6,3
15	0,36	0,27	6,5
Batezbestekoak	= BATEZBESTEKOA (D4:D18)	= BATEZBESTEKOA (C4:C18)	= BATEZBESTEKOA (D4:D18)

kalkulatu

$$\frac{D+d}{2} = \text{Ø}$$

Ø= bolumenaren kalkuluak egiteko erabiliko dugun diametroa

Gorputz geometrikoen artean, zuhaitzen enborra zilindroa litzateke. Beraz, batez besteko diametroa harturik (**Ø**), guztira zenbat metro kubiko (m^3) egur izango dugun jakiteko, zilindroaren bolumenaren formula aplikatuko dugu.



Halere, guk ezin ditugu enborrak bere osotasunean aprobetxatu, horiei zuhaitz-azala kentzen baitzaie, eta galera hori bolumen osoaren % 5 izatera hel daiteke.

Bestalde, badakigu enborraren metro kubikoa 35 €-an saltzen dela; hori guztia kontuan hartuta, zenbat diru ordaindu beharko zaion egur-ekoizleari jakin nahi dugu.

Xedea

- Neurriarekin eta geometriarekin zerikusia duen arazo-egoera identifikatzea, emaitzak kritikoki interpretatuz eta aztertuz.
- Zenbakiei, kalkuluei, neurriei, geometriari eta informazioaren tratamenduari buruz planteatutako problema, ikerketa matematikoa eta lanaren proiektua formulatzea eta ebaztea.

Helburuak

- Problema identifikatzea eta ulertzea, eta ebazpen-prozesua justifikatzea.
- Problema zilindroaren bolumenaren formularekin lotzea.
- Arazo-egoera beste gorputz geometriko baten bidez ebatz daitekeen argudiatzea (adibidez, kono-enborraren formularen bidez).
- Zenbakien erabilerari dagokionez, etekina kalkulatzeko ehunekoen kalkulua aplikatzea.
- Lortutako emaitzak txosten batean idaztea, eta ahoz ere horien berri ematea.
- Benetako egoeretan neurketak eta geometriak duten garrantziaz ohartzea.
- Taldean ikasi beharreko lanetan elkarri laguntzea; elkarlana sustatzea eta horretan aritzea.

Ataza

Ikasleek irtenbidea ematea aurkeztutako egoera geometrikoari. Bestalde, kalkuluak egiteko eredu geometriko egokiena identifikatzea, eta horren inguruan ikertzea. Gero, egindako lana txosten batean biltzea eta ikasgelan ahoz azaltzea, lexiko matematiko egokia erabiliz.

Jarraibideak

Ikasleek binaka honako hau egingo dute:

- Arazo-egoera aurkeztu eta eman beharreko pausoen eskema egin.
- Eredu geometriko teoriko egokienak zein izan daitezkeen proposatu, eta soluzio hoberena eta hurbilekoena lortu.
- Kalkulu-orriaren kalkuluak planteatu eta egin.
- Egindako lanaren ondorioak zehaztu.
- Antzeko beste egoera batzuk identifikatu eta proposatu.
- Taldekideen aurrean aurkezpena egin. Horretarako, lexiko geometrikoa jakin eta erabili behar da.
- Ikasitakoaren eta ikas-prozesuaren beraren ebaluazioa egin (koebaluazioa eta auto-ebaluazioa).

7.1.2. Ontzi bat diseinatzea

Izenburua:	**ONTZI BAT DISEINATZEA**

Arloa/Gaia:	***Matematika***

Maila:	**DBH 2**

Testuingurua

Ontziek, produktuak edukitzeaz eta babesteaz gain, horiei balio erantsia ematen diete, eta produktu identifikatzaileak ere bihur daitezke. Askotan, produktu bat aukeratzeko garaian, ez daukagu iritzi objektiborik produktu baten edo bestearen artean, eta forma erabakigarria izan daiteke. Zergatik? Bada, argi dago: ontzien forma batzuk beste batzuk baino erakargarriagoak iruditzen zaizkigu.

Hori dela eta, ontzi-enpresek ondo baino hobeto dakite ontziaren forma garrantzizko aldagaia izan daitekeela erosteko unean, eta kontsumitzaileen gustuak ikertzen dituzte.

Arlo ekonomikoari dagokionez, erabiltzen den materialaren arabera, ontziak produktu-kostuaren % 2 izatera hel daitezke. Bestalde, gaur egun badakigu hainbeste plastikozko ontzi erabiltzeak arazo handiak sortu dituela. Beraz, ontziak diseinatzeko materiala aukeratzerakoan, material birziklatuak eta jasangarriak lehenetsiko ditugu.

Arazoa

Enpresa batek produktu berri bat merkaturatu nahi du. Ontzia diseinatzeko agindu digute, eta ezarritako baldintzak hauek dira:

- Materiala birziklagarria izatea.
- Ontziak 600 cm^3-tik gorako bolumena izatea, baina gehienez litro batekoa.

Guk forma ederreko ontzi bat diseinatu behar dugu; baina, horretarako, ahalik eta azalera txikiena erabiliko dugu.

Xedea

Gorputz geometriko batzuen ezaugarriak lantzea, haien azalera eta bolumena kalkulatuz.

Helburuak

- Eguneroko egoeretan geometriak duen garrantziaz ohartzea.
- Gorputz geometrikoen ezaugarri esanguratsuenak eta lexiko matematikoa jakitea eta identifikatzea: erradioa, diametroa, apotema, azalera, bolumena, eta abar.
- Unitate egokiak aukeratzea.
- Gorputz geometriko bakoitzari dagokion azaleraren eta bolumenaren formula aplikatzen jakitea.
- Ezarritako baldintzak kontuan hartuta, ontzia diseinatzea. Horretarako, ezagutzen ditugun gorputz geometrikoen artetik eredu bat edo batzuk

aukeratuko ditugu, eta baita ontziaren neurriak eta garapen laua zehaztuko ere.

- Gehien komeni zaigun eredu geometrikoaren inguruko argudioak ematea[4].

- Ikasleak maketak edo hiru dimentsioko eskemak egiteko gai izatea.

Ataza

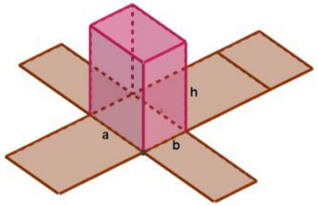
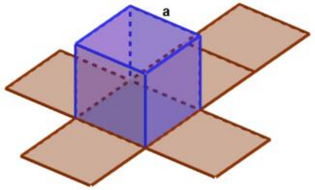
Ikasleek arazo-egoera ebatzi behar dute. Horretarako, zer material mota erabiliko duten erabaki beharko dute, eta egindako prozesuaren berri txosten batean emango dute. Bestalde, aukera izango dute ontzia bi modutara aurkezteko, hala nola fisikoki edo eskema bidez. Gainera, ahozko aurkezpena ere egin beharko dute.

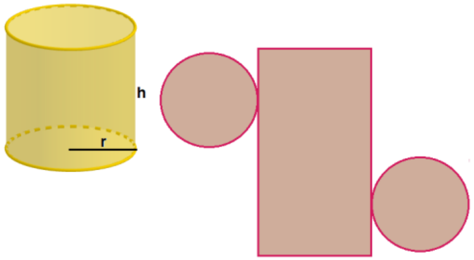
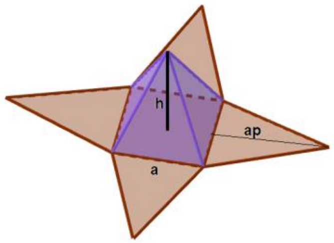
Jarraibideak

Ikasleek, hirunaka, honako hau egin beharko dute:

- Arazo-egoera aurkeztu, eta eman beharreko pausoen eskema egin.
- Hautatutako material motaren berri eman txosten batean, hartutako erabakia modu arrazoituan argudiatuz.
- Eredu geometriko teoriko egokiena zein izan daitekeen proposatu, eta soluzio hoberena lortu.
- Maketa edo hiru dimentsioko irudia egin, dimentsioak zehaztuz, eta azalera eta bolumena kalkulatuz.
- Prozesua eta ikasitakoa ebaluatu (koebaluazioa eta ebaluazioa).

[4] Lagungarria izan daiteke gorputz geometrikoaren eranskina.

GORPUTZ GEOMETRIKOAK	AZALERA	BOLUMENA
 **Prisma**	$A = oinarriaren\ \ perimetroa \cdot altuera + 2 \cdot oinarriaren\ \ azalera$ $A = 2\ \ (ab + ac + bc)$	$B = oinarriaren\ \ azalera \cdot altuera$ $B = abh$
 **Kuboa**	*Kuboa denez, 6 aurpegiak berdinak dira:* $A = 6a^2$	$B = oinarriaren\ \ azalera \cdot altuera$ $B = a^3$

 **Zilindroa**	$A = zirkuluaren\ \ perimetro \cdot altuera + 2 \cdot zirkuluaren\ \ azalera$ $2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r+h)$	$B = oinarriaren\ \ azalera \cdot altuera$ $B = \pi r^2 h$
 **Piramidea**	$A = oinarriaren\ \ azalera + 4 \cdot alboko\ \ aurpegiaren\ \ azalera$ $= a^2 + 4\dfrac{aa_p}{2} = a(a + 2aa_p)$	$B = \dfrac{oinarriaren\ \ azalera \cdot altuera}{3}$ $B = \dfrac{a^2 h}{3}$

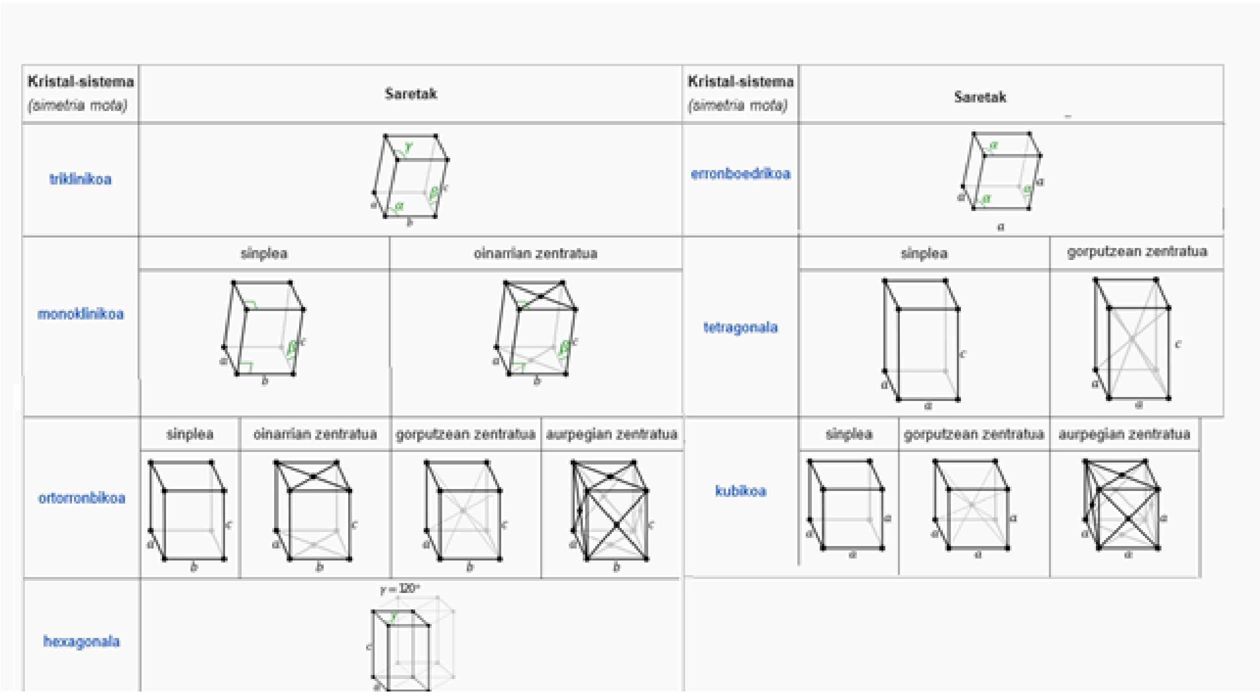
7.2. IRAKURTZEKO GAITASUNA

7.2.1. MINERALEN KRISTALIZAZIOA: EREDU GEOMETRIKOAK NATURAN

Naturan mineral batzuk kristalizatu egiten dira eredu geometrikoei jarraituz, adibidez, kuboa. Guk forma horiek kopiatu egin ditzakegu, poliedro erregularretan ebaketak eginez. Horren adibide argia fluorita minerala da; haren kristalizazio teorikoa kubo-formakoa da eta maiz kuboaren mozketak ikusgarriak izaten dira.

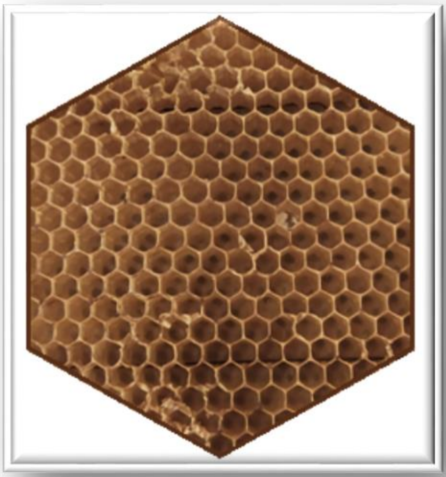
Beste adibide bat pirita da. Kasu honetan, kubo mihiztatuaren forma izaten du, baita dodekaedro-forma ere (piritoedroa).

Zazpi kristal-sare tridimentsional existitzen dira, eta mineral guztien barne-egitura horien arabera antolatuta dago. Kristal-sistemak hauek dira: kubikoa, tetragonala, erronboedrikoa, hexagonala, ortorronbikoa, monoklinikoa eta triklinikoa.

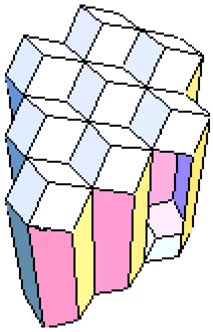


Kristal-egituren sailkapena beren simetriaren arabera. Wikipedia.

7.2.2. POLIEDROAK NATURAN



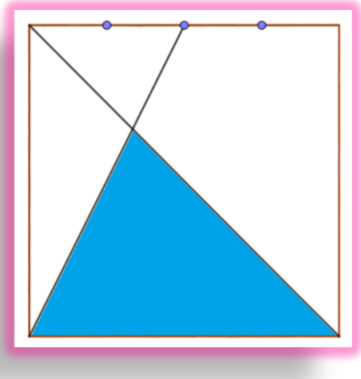
Poliedroak ohiko egiturak dira naturan. Natura beti saiatzen da ahaleginik txikienarekin etekinik handiena lortzen. Horren adibide bat ikus dezakegu erleek eztia biltegiratzeko eraikitzen dituzten erlauntzetan. Eraikin horiek egiteko, erleak azalerarik eta edukierarik handieneko formak lortzen saiatzen dira, ahalik eta argizaririk gutxien erabiliz. Hori dela eta, haien erlauntzak hutsunerik gabeko gelaxkez osatutako mosaiko homogeneoak dira. Egitura horiek gelaxka triangeluar, karratu edo hexagonalekin osa daitezke. Hiru forma horietatik, hexagonoa da azalerarik handiena duena, perimetroak berdinak izanik; erleen gelaxkak, ordea, ez dira prisma hexagonal zehatzak. Horrela balitz ezti kantitate bera gordeko lukete; baina gelaxka ixteko argizari kantitate gehiago erabili beharko lukete. Erleak, ordea, argizari kantitate minimoa erabiltzen saiatzen dira; hortaz, gelaxkaren alde bat hiru erronborekin ixten dute (erreparatu beheko irudiari), bolumena prisma hexagonalarena izanda ere, azalera ahalik eta txikiena izan dadin.

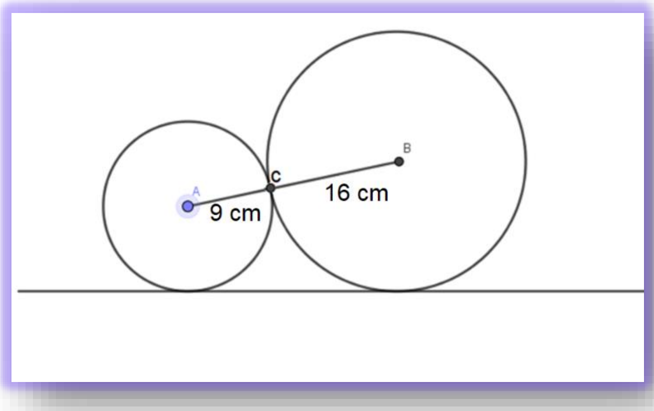


7.3. GEOMATEMATIKA-OLINPIADA

Hona hemen geometria atalaren inguruko hainbat ariketa matematika-olinpiada prestatzeko.

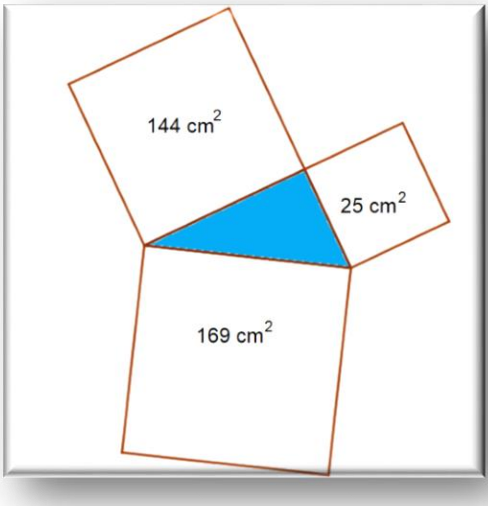
1. Determina ezazu koloreztatutako karratuaren azalerak zer frakzio adierazten duen.



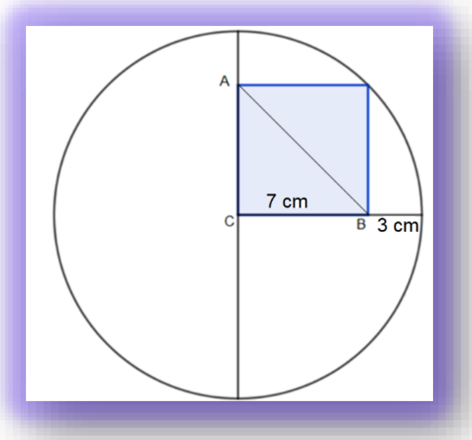


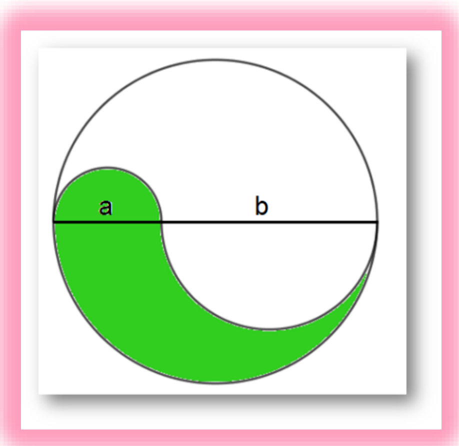
2. Lurrean bi baloi ditugu, eta horien erradioak 16 cm eta 9 cm dira. Kalkula ezazu zer altueratan ukitzen duten elkar.

3. Kolorez dagoen azalerak laku bat adierazten du. Zer neurri dituzte lakuaren aldeek? Zenbatekoa da haren azalera?



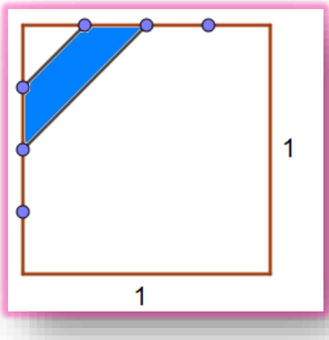
4. Kalkulatu $\overline{AB}$ zuzenkiaren luzera.



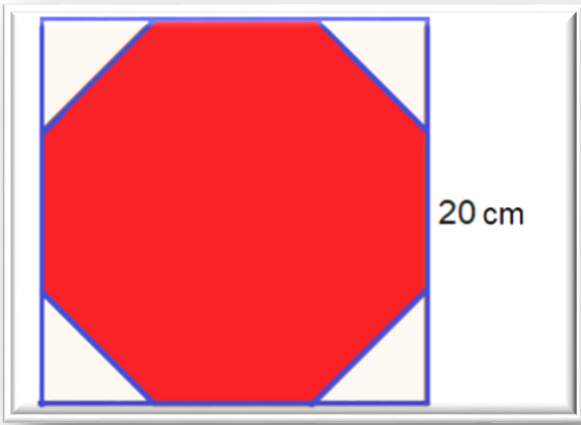


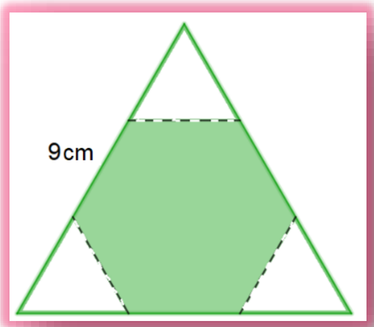
5. Badakigu *a*-ren luzera *b*-ren bikoitza dela. Kalkulatu zuriz eta berdez dauden eremuen azalerak, eta haien arteko erlazioa.

6. Kalkulatu urdinez dagoen zatiaren azalera.



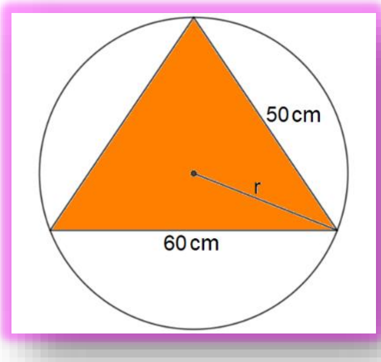
7. 20 cm-ko aldea duen karratu bati lau erpinetatik triangelu isoszeleak kendu zaizkio. Horrela, oktogono erregular bat lortu dugu. Kalkulatu oktogonoaren aldea eta azalera.



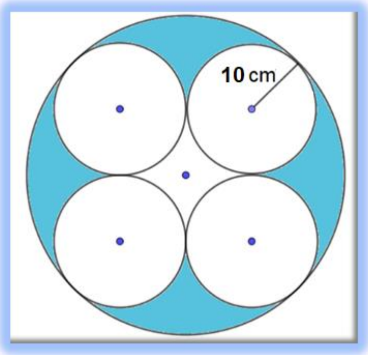


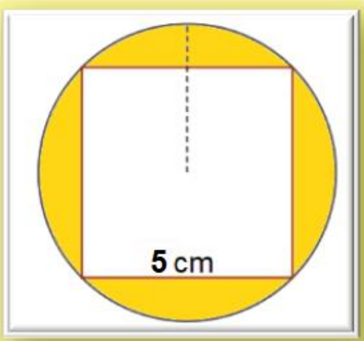
8. Alde bakoitzeko 9 cm dituen triangelu aldekide bati hiru erpinetatik hiru triangelutxo aldekide kentzen bazaizkio (ikusi irudia), hexagono erregularra lortuko dugu. Kalkulatu hexagonoaren aldea eta azalera.

9. Ikusi irudia eta kalkulatu zirkunferentziaren erradioa.



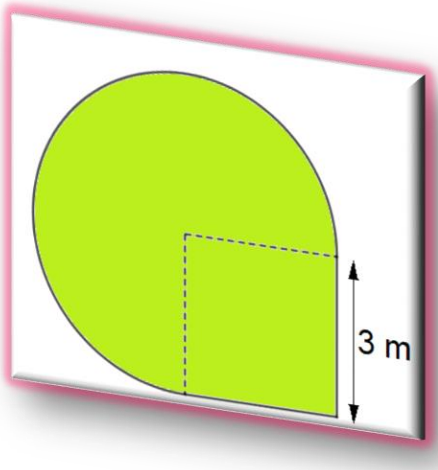
10. Irudiko zirkunferentzia txikien erradioa 10 cm luze da. Zenbat luze da zirkunferentzia handiaren erradioa? Zenbatekoa da urdinez dagoen zatiaren azalera?



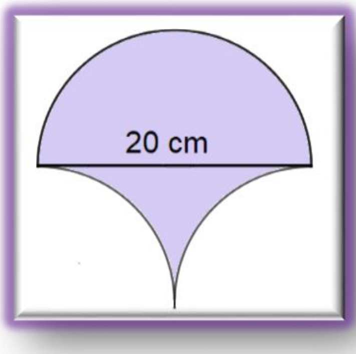


11. Karratuaren aldea 5 cm luze da; orain kalkula ezazu kolorez dagoen eremuaren azaleraren balioa.

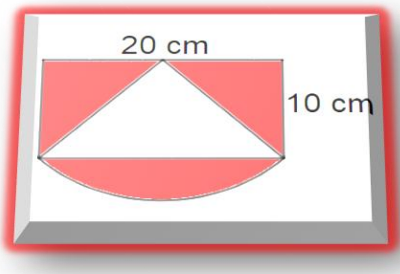
12. Kalkula ezazu irudi honen azalera.



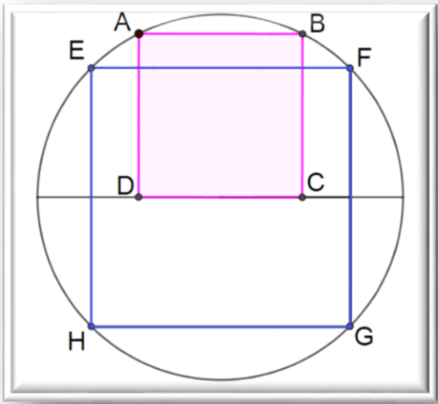
13. Kalkulatu irudiaren azalera eta perimetroa.

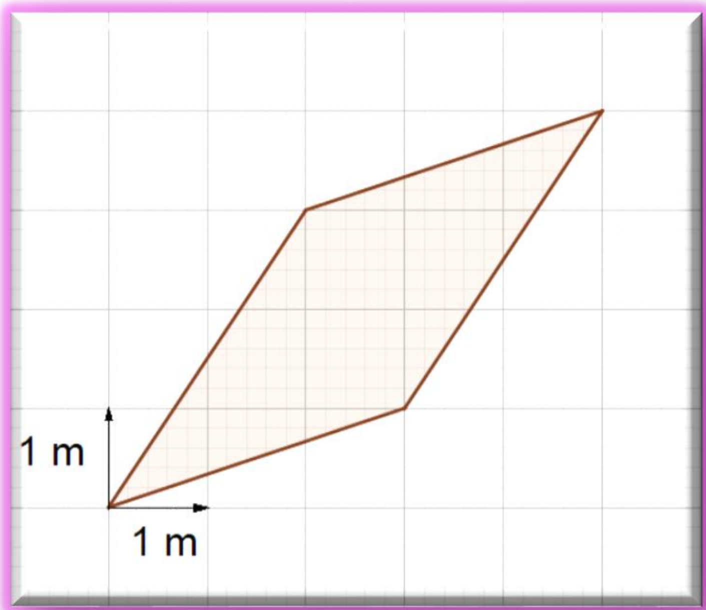


14. Kalkula ezazu koloreztatutako zatiaren azalera.



15. ABCD karratua irudiko goiko zirkunferentziaren erdian inskribatuta dago, eta haren azalera 36 cm^2-koa da. Zenbatekoa izango da zirkunferentzia osoan inskribatuta dagoen EFGH karratuaren azalera?





16. 5 m x 4 m-ko lursailean, lorategi bat jarri nahi dugu. Kalkulatu haren azalera.

WEB-GRAFIA

- *PROBLEMAS OLIMPIADA 2ºESO TORNAMIRA.* IES Matemáticas Ibaialde http://iesibaialde.educacion.navarra.es/web1/matematicas/olimpiadas/olimpiada-matematica-2o-e-s-o/problemas-olimpiada-2oeso-tornamira/ **(kontsulta-data: 2019/09/03)**

- *OLIMPIADA MATEMÁTICA ARAGONESA 2º ESO.* Sociedad Aragonesa Pedro Sánchez Ciruelos de Profesores de Matemáticas https://sites.google.com/site/oma2eso/preparacion **(kontsulta-data: 2019/09/05)**

8. BALIABIDEAK

GEOGEBRA

Matematikarako software interaktibo librea.

IMAGINARY

Matematikarako nazioarteko web-orri interaktiboa eta irekia.

CONCÉNTRICO

Logroñoko nazioarteko arkitektura- eta diseinu-jaialdia.

EMOZ

Zaragozako *origami* museo-eskola.

GRUPO ALQUERQUE

Geometria modularra papiroflexiarekin. Unitate didaktiko bat.

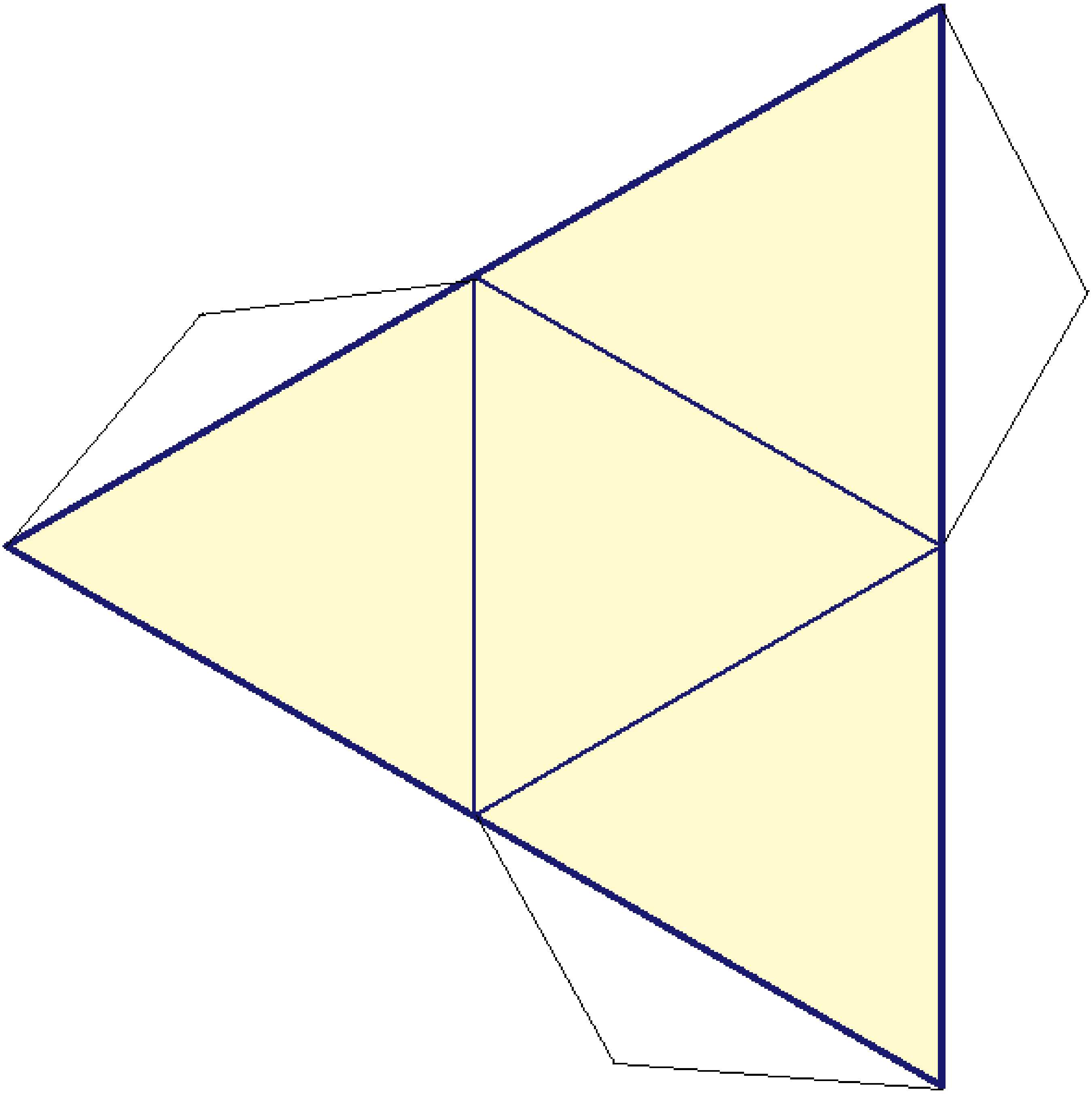
FOLDING DIDACTIS. BADALONA

9. IRUDIEN ERREFERENTZIA (hurrenez hurren)

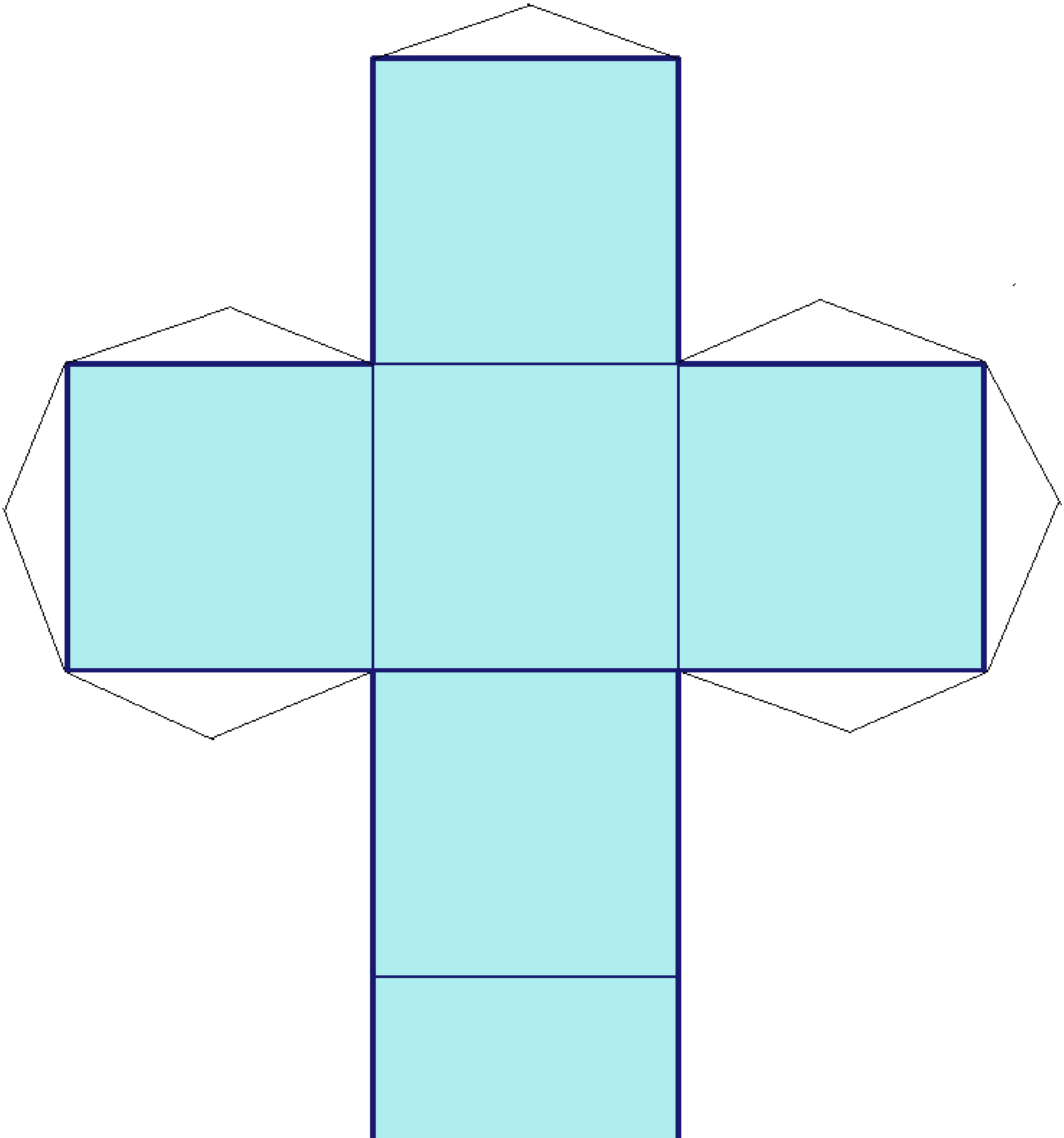
- *DONOSTIAKO HESIA,* Ana Jimenez.
  https://pixabay.com/photos/san-sebastian-donostia-2343806/
- *MENGERREN BELAKIA*
  https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Menger_sponge_(Level_0-3).jpg
- *DORRE EIFFEL,* Piotr Siedleck.
  https://www.publicdomainpictures.net/es/view-image.php?image=146068&picture=torre-eiffel
- *SIERPINSKI FRAKTALA KUBOAN,* Rössel Johannes.
  https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sierpinski_carpet_6,_white_on_black.svg
- *ESNE BIDEA.* Buddy Nath.
  https://pixabay.com/illustrations/space-background-spiral-galaxy-1796654/
- *VITRUVIAR GIZONA*
  https://pixabay.com/photos/human-leonardo-da-vinci-62966/#comments
- *RED CUBE BROADWAYN.* Isamu Noguchi (1968). Zhao Bohao.
  https://commons.wikimedia.org/wiki/File:El_cubo_rojo_en_Broadway_-_panoramio.jpg
- *GIRIH ARABIAR ORNAMENTUAK,* Patrick Ringgenberg (2008).
  https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Samarkand_Shah-i_Zinda_Tuman_Aqa_complex.JPG
- *SATURNIAN HEXAGON COLLAGE. CASSINI HUYGENS MISIOA.* NASA/JPL-Caltech/Space Science Institute (2006).
  https://www.jpl.nasa.gov/spaceimages/details.php?id=PIA21053
- *GATZA KUBOAK.*
  https://es.dreamstime.com/foto-de-archivo-cubos-de-la-sal-en-un-microgr%C3%A1fo-de-la-polarizaci%C3%B3n-image52677262
- *UR-IZOTZAREN EGITURA*. Jeffrey Holcombe.
  https://imgbin.com/png/hL5ZMtNn/tetrahedral-molecular-geometry-tetrahedron-structure-water-ice-png
- *ADENOBIRUS BATEN KAPSIDE IKOSAEDRIKOA.* Dr. Richard Feldmann.
  https://es.wikipedia.org/wiki/C%C3%A1pside_v%C3%ADrica#/media/Archivo:Adenovirus.jpg
- *POLIEDROEN TAULA PERIODIKOA.* José Lorenzo, (2016).
  http://joselorlop.blogspot.com/2013/11/45-la-tabla-perodica-de-los-poliedros.html
- *KRISTAL-SISTEMAK.*
  https://eu.wikipedia.org/wiki/Kristal-egitura
- *CAJAS DE MUDANZA*
  https://pixabay.com/es/illustrations/cajas-de-mudanza-cuadro-paquete-3660269/

10. ERANSKINA. Solido erregularrak eraikitzeko txantiloiak

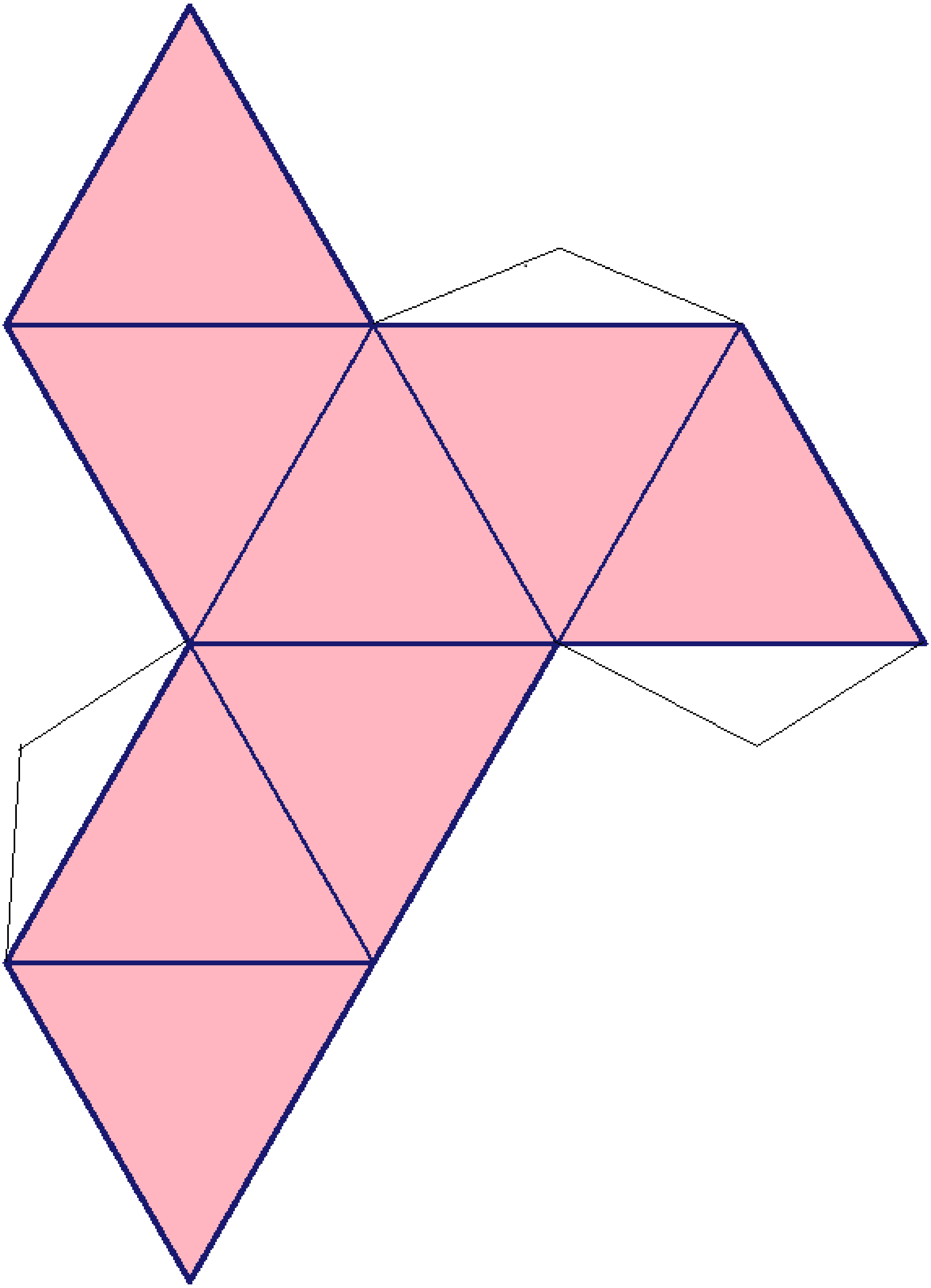
TETRAEDROA



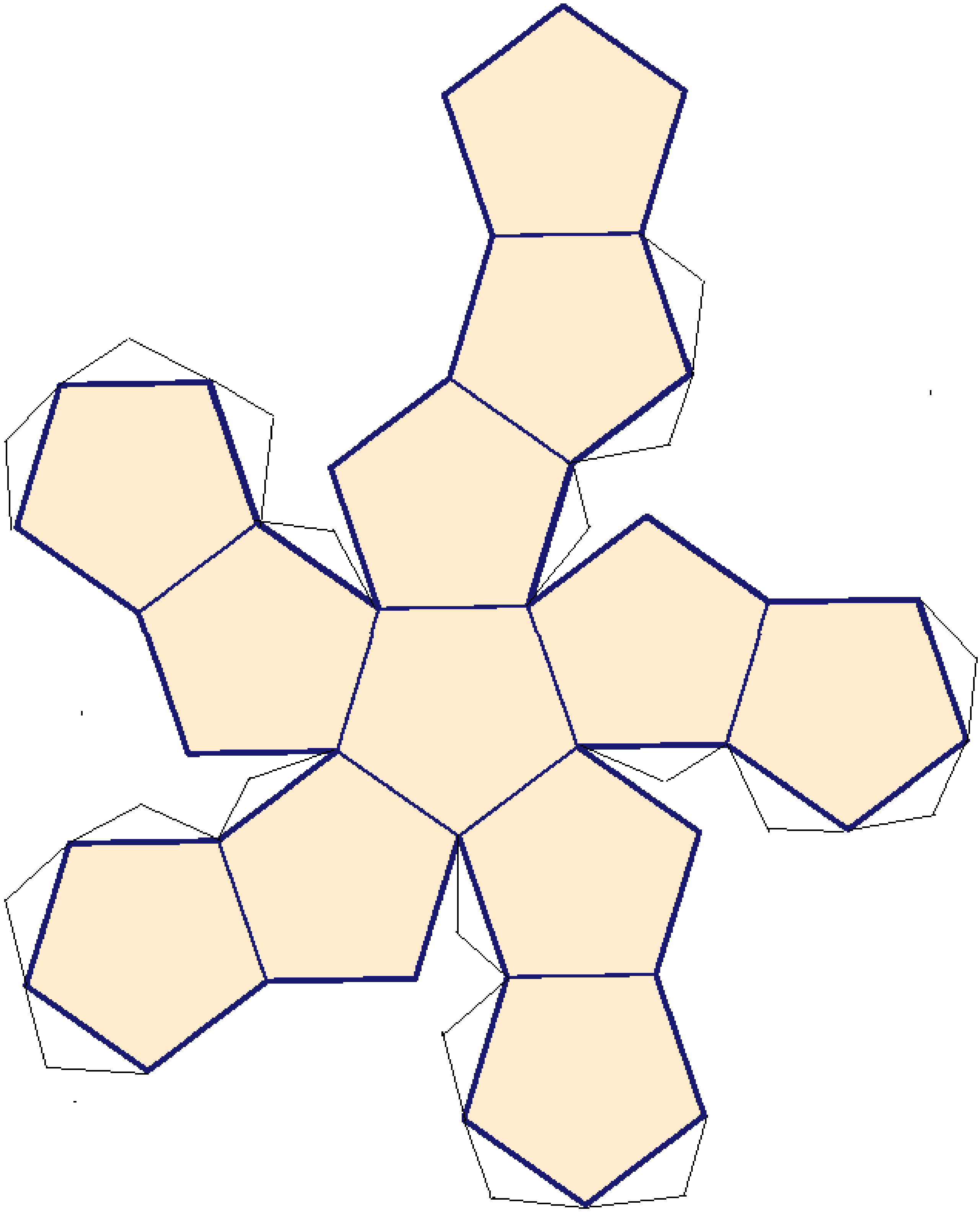
HEXAEDROA



OKTAEDROA



DODEKAEDROA



IKOSAEDROA